

Bifurkationssätze
für
schwach stetige Potentialoperatoren

von
Jürgen Vetter
aus Stockholm



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548420_0058

**Bifurkationssätze
für
schwach stetige Potentialoperatoren**

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades



vorgelegt von
Jürgen Vetter
aus Stockholm

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaftlichen
Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 23. 11. 1977

Vorsitzender der Promotionskommission: Professor Dr. E. Schweizer

Erstberichterstatter: Professor Dr. D. Kölzow

Zweitberichterstatter: Professor Dr. H. Berens



Einleitung

In der Nichtlinearen Operatorentheorie spielen die Begriffe des Eigenwertes und des Bifurkationspunktes eine wichtige Rolle. Sie sind wie folgt definiert:

Es seien X, Y Banachräume und A, B Operatoren, die X nach Y abbilden. Es gelte: $A(0)=B(0)=0$.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert zum Eigenvektor $x \in X \setminus \{0\}$ bezüglich des Operatorenpaares A, B , falls gilt:

$$\lambda Ax = Bx.$$

Eine Zahl $\lambda^* \in \mathbb{R}$ heißt Bifurkationspunkt bezüglich A, B , falls zu beliebigen Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ stets ein Eigenwert λ und ein zugehöriger Eigenvektor x bezüglich A, B derart existieren, daß $|\lambda^* - \lambda| \leq \varepsilon$ und $\|x\| \leq \delta$ gilt.

Eine Eigenschaft der Bifurkationspunkte bezüglich A, B beschreibt der folgende Satz, der für $A'(0) = \text{Identität}$ in der Arbeit von NAUMANN [16] formuliert ist:

Es seien die Operatoren $A, B: X \longrightarrow Y$, $A(0)=B(0)=0$, im Nullpunkt differenzierbar und $A'(0)$ sei ungleich der Nullabbildung. Dann ist jeder Bifurkationspunkt bezüglich A, B ein Eigenwert bezüglich $A'(0), B'(0)$.

Es entsteht die Frage, welche Bedingungen an die Operatoren A und B die Umkehrung dieser Aussage implizieren. Zu den wichtigsten Resultaten im Zusammenhang mit dieser Fragestellung gehören die Sätze von KRASNOSELS'KII [12], BERGER [4] und NAUMANN [17]. Diese Autoren untersuchen Gleichungen mit Operatoren A und B , die einen reellen

Hilbertraum in sich abbilden. Hierbei wird mindestens einer dieser Operatoren als vollstetig oder verstärkt stetig vorausgesetzt.

Das grundlegende Resultat dieser Arbeit ist eine Verallgemeinerung der genannten Bifurkationssätze durch Abschwächung der bisherigen Voraussetzungen sowohl über die Stetigkeit der Operatoren als auch über ihren Definitionsbereich:

Es wird ein Bifurkationssatz bewiesen für schwach stetige Operatoren A und B, die einen reellen reflexiven Banachraum in einen reellen Hilbertraum abbilden.

Um Operatoren, die einen Banachraum X in einen Hilbertraum Y abbilden, untersuchen zu können, wird im ersten Paragraphen der Begriff des T-Potentialoperators eines Funktionals eingeführt. Hierbei ist T ein linearer und beschränkter Operator von X nach Y. Der von den oben genannten Autoren benutzte Begriff des Potentialoperators eines Funktionals ist ein Spezialfall hiervon. Ferner ist es zweckmäßig, zusätzlich für lineare, beschränkte Operatoren den Begriff der T-Hermitezität einzuführen. Es besteht der Zusammenhang:

Ein linearer, beschränkter T-hermite'scher Operator ist ein T-Potentialoperator.

Mit Hilfe dieser Begriffsbildungen wird im zweiten Paragraphen der verallgemeinerte Bifurkationssatz zunächst für den Fall separabler Räume formuliert.

Es sei X ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum und Y ein reeller separabler Hilbertraum. Der Operator $T: X \rightarrow Y$ sei linear, beschränkt mit in Y dichtem Bild. Es sei $A: X \rightarrow Y$, $A(0)=0$, ein ungerader, schwach stetiger, im Nullpunkt differenzierbarer T -Potentialoperator eines Funktionals $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0)=0$. Es erfülle g die folgenden Bedingungen:

- (i) Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $g(x) \geq c \|x\|^2$ für $x \in X$.
- (ii) Für jedes $R > 0$ und alle $x \in \{x | g(x) = R\}$ gilt: $g(x) \neq g(sx)$, falls $s > 1$.

Der Operator $A'(0)$ sei T -hermite'sch.

Es sei $B: X \rightarrow Y$, $B(0)=0$, ein ungerader, schwach stetiger, im Nullpunkt differenzierbarer T -Potentialoperator eines schwach nach oben halbstetigen Funktionals $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0)=0$. Der Operator $B'(0)$ sei T -hermite'sch. Das Funktional $x \rightarrow \langle B'(0)x, Tx \rangle_Y$ sei auf X nicht negativ.

Dann existiert entweder eine endliche nichtleere Menge oder eine antitone Folge positiver Bifurkationspunkte bezüglich A , B .

Der Beweis beruht auf dem Galerkin-Verfahren: Zu einer Folge gewisser endlich-dimensionaler Operatorengleichungen werden mit Hilfe des von LUSTERNIK und SCHNIEREIMANN [13] entwickelten Variationsprinzips abzählbar viele positive konvergente Folgen derart konstruiert, daß für jede Folge gilt: ihr n -ter Wert ist Bifurkationspunkt der n -ten Operatorengleichung; ihr Grenzwert ist Bifurkationspunkt bezüglich A , B . Bereits BROWDER [8] verwendet die Kombination des Galerkin-Verfahrens mit dem Variationsprinzip von Lusternik und Schnierelmann zur Lösung des Nichtlinearen Eigenwertproblems. Als Spezialfall erhält man aus obigem Resultat für separable Räume den Satz von BERGER [4].

Im dritten Paragraphen wird die Frage behandelt, inwieweit der verallgemeinerte Bifurkationssatz auf den Fall nicht-separabler Räume übertragen werden kann. Hierzu wird der Begriff des T-invarianten Unterraums zu einem Operator A wie folgt eingeführt:

Es seien X, Y Banachräume, U ein Unterraum von X .
Es seien $A, T: X \rightarrow Y$ Operatoren. Es heißt U ein
T-invarianter Unterraum zum Operator A , falls gilt:
 $A(U) \subseteq T(U)$.

Mit dieser Begriffsbildung wird das folgende Resultat bewiesen:

Im obigen Bifurkationssatz kann auf die Separabilitätsbedingung an X und Y verzichtet werden, falls ein separabler Unterraum von X existiert, der gleichzeitig T-invariant zum Operator A und zum Operator B ist.

Als Korollar erhält man hieraus für ungerade Operatoren den Satz von KRASNOSELS'KII [12].

Der vierte und fünfte Paragraph enthalten die folgenden Anwendungen des verallgemeinerten Bifurkationssatzes.

Im vierten Paragraphen wird, der Arbeit von BERGER [3] folgend, ein Problem aus der Deformationstheorie elastischer Platten behandelt. Untersucht wird das Verhalten einer dünnen, flachen, elastischen Platte, auf deren Rand eine Kraft wirkt. Man weiß, daß die Platte flach bleibt, bis die Kraft einen kritischen Wert erreicht hat. Dann beginnt

die Platte sich zu biegen. Weitere kritische Werte beschreiben diejenigen Kräfte, welche das gleiche Phänomen verursachen, jedoch bei Ausgangskräften, die oberhalb eines bereits ermittelten kritischen Wertes liegen.

Die bei der Einwirkung einer Kraft auf die eingespannte flache Platte Ω resultierende Ausbiegung der Platte ergibt sich bekanntlich aus den Lösungen der zugehörigen Von Karman-Gleichungen. BERGER [3] bestimmte aus diesen Gleichungen Potentialoperatoren A und B des Sobolevraumes $\dot{W}_{2,2}(\Omega)$ in sich derart, daß die Bifurkationspunkte bezüglich des Operatorenpaares A, B kritische Werte für die einwirkende Kraft sind. Der Beweis von BERGER beruht jedoch auf einem früheren Ergebnis aus der Arbeit BERGER [2], dessen Richtigkeit von CLARK, dem Referenten der Arbeit in den MR 35#2181 und von BROWDER [8] angezweifelt wird. +)

Der Verfasser modifiziert den Ansatz von BERGER [3], indem er die Potentialoperatoren A, B von $\dot{W}_{2,2}(\Omega)$ in sich ersetzt durch geeignete Δ -Potentialoperatoren von $\dot{W}_{2,2}(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$ und auf letztere seinen verallgemeinerten Bifurkationssatz anwendet. Wie leicht einzusehen ist, gelangt der Verfasser zu denselben Bifurkationspunkten wie in BERGER [3] .

+) Nach Mitteilung von Professor R. Böhme ergibt sich einerseits das erwähnte Ergebnis von BERGER [2] aus Theorem 8 der Arbeit von F. E. BROWDER: "Nonlinear Eigenvalue Problems and Group Invariance" in "Functional Analysis and Related Fields", Proc. Chicago, 1968, Springer, Berlin, 1970, andererseits eine weitere Rechtfertigung des Ansatzes von BERGER [3] aus den Sätzen II.1. und III.1. der Arbeit R. BÖHME: "Die Lösung der Verzweigungsgleichungen für nichtlineare Eigenwertprobleme", Math.Z. 127, 105-126, 1972.

In der Arbeit von VOIGT und WLOKA [19] werden mit Hilfe des Satzes von LAX-MILGRAM Ergebnisse zur schwachen Lösbarkeit der auf dem beschränkten Gebiet Ω definierten Differentialgleichung $Lx = f$ gewonnen, wobei L ein linearer in Ω stark elliptischer Differentialoperator und f ein Element aus $L_2(\Omega)$ ist. Hierdurch angeregt, werden im fünften Paragraphen lineare Differentialgleichungen der Form $\Lambda Lx = Mx$ untersucht und der folgende Struktursatz für die Menge der schwachen Eigenwerte bewiesen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ ein beschränktes Gebiet. Sei $n \geq 2$ aus $\mathbb{N}$.
Es sei $L = \sum_{|s| \leq 2n} a_s(x) D^s$ ein reeller, formal selbst-

adjungierter stark elliptischer Differentialoperator in Ω .

Es sei $M = \sum_{|s| \leq m} b_s(x) D^s$ mit $m < n$ aus $\mathbb{N}$, ein reeller,

formal selbstadjungierter, positiver Differentialoperator in Ω .

Dann existiert eine Konstante k derart, daß für jedes μ mit $(-1)^{n+1} \mu \geq k$ gilt:

Die Menge der schwachen Eigenwerte Λ der Gleichung

$$\Lambda(Lx - \mu x) = Mx$$

besteht entweder aus einer endlichen nichtleeren Menge positiver Zahlen oder aus einer gegen Null konvergenten positiven Folge.

Das Resultat beruht auf einem Spezialfall des verallgemeinerten Bifurkationssatzes. Es ergänzt die Struktursätze von VOIGT und WLOKA zum Eigenwertproblem $Lx = \Lambda x$.

Im Anhang wird aufgezeigt, inwiefern die Resultate zur Operatorengleichung $\Lambda Ax = Bx$ dieser Arbeit über die der kürzlich erschienen Monographie A. LANGENBACH [20] hinausgehen.

In der Schlußbemerkung wird der Zusammenhang des verallgemeinerten Bifurkationssatzes mit dem Bifurkationssatz von NAUMANN [17] diskutiert und bemerkt, daß sich der Bifurkationssatz von NAUMANN auf beliebige T-Potentialoperatoren verallgemeinern ließe.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. D. Kölzow,
danke ich herzlich für seine richtungsweisenden Ratschläge
zu dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

I.	<u>Bifurkationssätze für schwach stetige Operatoren von reflexiven Banachräumen in Hilberträume</u>	
1.	T-Potentialoperatoren und einige ihrer Eigenschaften	1
2.	Bifurkation von Lösungen nichtlinearer Operatorengleichungen in separablen Räumen	5
3.	Bifurkation von Lösungen nichtlinearer Operatorengleichungen in nichtseparablen Räumen	26
II.	<u>Anwendungen</u>	
4.	Eine Anwendung des verallgemeinerten Bifurkationssatzes auf ein Problem aus der Deformationstheorie elastischer Platten	31
5.	Ein Struktursatz für die Menge der schwachen Eigenwerte der linearen Differentialgleichung $\mathcal{A}Lx = Mx$	41
Anhang		
	Bemerkungen zur Monographie A. LANGENBACH [20]	50
	Schlußbemerkung zur Arbeit J. NAUMANN [17]	50
	Literaturverzeichnis	51

Kapitel I

Bifurkationssätze für schwach stetige Operatoren
von reflexiven Banachräumen in Hilberträume

§ 1 T-Potentialoperatoren und einige ihrer Eigenschaften

Um Operatoren, die einen Banachraum X in einen Hilbertraum Y abbilden, untersuchen zu können, wird in diesem Paragraph der Begriff des T-Potentialoperators eines Funktionals eingeführt. Hierbei ist T ein linearer, beschränkter Operator von X nach Y . Der in der Literatur benutzte Begriff des Potentialoperators eines Funktionals ist ein Spezialfall hiervon. Die hier angegebenen Resultate für T-Potentialoperatoren sind für Potentialoperatoren bereits bekannt.

In diesem Paragraphen bezeichne X stets einen reellen Banachraum und Y einen reellen Hilbertraum.

1.1. Definition

Seien $A, T: X \rightarrow Y$ Operatoren, T linear und beschränkt.

Es existiere ein Funktional $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ und ein $x_0 \in X$ derart, daß gilt:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(x_0 + th) - g(x_0)) = \langle Ax_0, Th \rangle \quad \forall h \in X.$$

Hierbei ist $\langle, \rangle$ das Innere Produkt auf Y .

Dann heißt A ein T-Potentialoperator von g in x_0 .

Ist A ein T-Potentialoperator von g in allen Punkten von X , so heißt A ein T-Potentialoperator von g .

1.2. Beispiel

a) Sei $T: X \rightarrow Y$ linear, beschränkt. Es ist T ein T-Potentialoperator des Funktionals $1/2 \|Tx\|^2$.

b) Sei $T: Y \longrightarrow Y$ linear, beschränkt, selbstadjungiert.

Dann ist T ein Id_Y - Potentialoperator des Funktionals $1/2 \langle Tx, x \rangle$. Hierbei bezeichnet Id_Y die Identität auf Y .

1.3. Definition

Der Operator $A: X \longrightarrow Y$ heißt hemistetig, falls A jede längs eines beliebigen Geradensegmentes in X stark konvergierende Folge in eine Folge abbildet, die in Y schwach konvergiert.

1.4. Lemma

Vor.: Sei $A: X \longrightarrow Y$ hemistetig, $T: X \longrightarrow Y$ linear, beschränkt.

Es sei A ein T -Potentialoperator eines Funktionals $g: X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Beh.: Für alle $x \in X$ gilt:

$$g(x) = g(0) + \int_0^1 \langle Asx, Tx \rangle ds.$$

Bew.: Zu fest gewähltem $x \in X$ sei die Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch: $\varphi(s) := g(sx)$. Dann gilt:

$$\varphi'(s) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(sx+tx) - g(sx)) = \langle Asx, Tx \rangle.$$

Da A hemistetig, ist φ' stetig. Integration von φ' über $[0, 1]$ ergibt die Behauptung.

1.5. Lemma

Vor.: Wie in Lemma 1.4.

Beh.: Für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\int_0^1 \langle Asy, Ty \rangle ds - \int_0^1 \langle Asx, Tx \rangle ds = \int_0^1 \langle A(x+s(y-x)), T(y-x) \rangle ds.$$

Bew.: Zu fest gewähltem $x, y \in X$ sei die Abbildung $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch: $\varphi(s) := g(x+s(y-x))$. Es gilt:

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(x+(s+t)(y-x)) - g(x+s(y-x))) = \\ &= \langle A(x+s(y-x)), T(y-x) \rangle.\end{aligned}$$

Integration von φ' über $[0,1]$ ergibt mit Lemma 1.4. die Behauptung.

1.6. Lemma

Vor.: Seien $A, T: X \longrightarrow Y$ Operatoren, T linear, beschränkt.

Es sei A ein T -Potentialoperator eines Funktionals $g: X \longrightarrow \mathbb{R}$.

Beh.: a) g differenzierbar $\implies g'_X(h) = \langle Ax, Th \rangle \forall x, h \in X$.
b) A stetig $\implies g$ stetig differenzierbar.

Bew.: a) Sei $x, h \in X$.

Es gilt: $g(x+th) - g(x) - g'_X(th) = \omega(x, th)$

$$\text{mit } \lim_{\|th\| \rightarrow 0} (1/\|th\|) \cdot |\omega(x, th)| = 0.$$

$$\implies \frac{1}{t} (g(x+th) - g(x)) - g'_X(h) = (1/t) \omega(x, th)$$

$$\implies \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(x+th) - g(x)) = g'_X(h).$$

b) Sei $x \in X$. Es ist zu zeigen:

für $\omega(x, h) := g(x+h) - g(x) - \langle Ax, Th \rangle$ gilt:

$$(1/\|h\|) \cdot |\omega(x, h)| \longrightarrow 0 \quad \text{für } h \longrightarrow 0, \forall h \in X.$$

Da A stetig, ist A auch hemistetig und es folgt mit Lemma 1.5.:

$$\begin{aligned}|\omega(x, h)| &= \left| \int_0^1 \langle A(x+sh), Th \rangle ds - \langle Ax, Th \rangle \right| \\ &\leq \|T\| \|h\| \int_0^1 \|A(x+sh) - Ax\| ds.\end{aligned}$$

Hieraus folgt mit der Stetigkeit von A die Behauptung.

1.7. Lemma

Vor.: Sei $A: X \rightarrow Y$, $A(0)=0$, ein hemistetiger, im Nullpunkt differenzierbarer Operator. Sei $T: X \rightarrow Y$ linear, beschränkt.

Es sei A ein T -Potentialoperator eines Funktionals $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0)=0$.

Beh.: Für alle $\eta > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in X$ mit $\|x\| \leq \delta$ die Abschätzungen gelten:

$$I) \quad |g(x) - \frac{1}{2} \langle A'(0)x, Tx \rangle| \leq \frac{1}{2} \eta \|T\| \|x\|^2.$$

$$II) \quad |g(x) - \frac{1}{2} \langle Ax, Tx \rangle| \leq \eta \|T\| \|x\|^2.$$

Bew.: Für alle $\eta > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß für alle $x \in X$ mit $\|x\| \leq \delta$ gilt:

$$\|Ax - A'(0)x\| \leq \eta \|x\|$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \|Asx - A'(0)sx\| \, ds \leq \frac{1}{2} \eta \|x\|.$$

Es hat g die Darstellung: $g(x) = \int_0^1 \langle Asx, Tx \rangle \, ds$ für $x \in X$.

Somit gilt:

$$|g(x) - \frac{1}{2} \langle A'(0)x, Tx \rangle| = \left| \int_0^1 \langle Asx, Tx \rangle - \langle A'(0)sx, Tx \rangle \, ds \right|$$

$$\leq \int_0^1 \|Asx - A'(0)sx\| \, ds \cdot \|T\| \cdot \|x\| \Rightarrow I).$$

$$|g(x) - \frac{1}{2} \langle Ax, Tx \rangle| = |g(x) - \frac{1}{2} \langle A'(0)x, Tx \rangle + \frac{1}{2} \langle A'(0)x, Tx \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, Tx \rangle|$$

$$\leq \frac{1}{2} \eta \|T\| \cdot \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|A'(0)x - Ax\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$$

$$\Rightarrow II).$$

§ 2 Bifurkation von Lösungen nichtlinearer Operatoren- gleichungen in separablen Räumen

Ziel dieses Paragraphen ist es, einen Bifurkationssatz für schwach stetige T-Potentialoperatoren und separable Räume zu beweisen. Wichtigstes Hilfsmittel ist hierbei die von Lusternik und Schnierelmann entwickelte Theorie zur Charakterisierung der stationären Punkte einer reellwertigen Funktion auf einer endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit.

Es seien X, Y reelle Banachräume.

2.1. Definition

Es seien $A, B: X \rightarrow Y$ Operatoren. Es gelte: $A(0)=B(0)=0$.

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Eigenwert zum Eigenvektor $x \in X \setminus \{0\}$ bezüglich des Operatorenpaares A, B , falls gilt: $\lambda Ax = Bx$.

Eine Zahl $\lambda^* \in \mathbb{R}$ heißt Bifurkationspunkt bezüglich A, B , falls zu beliebigen Zahlen $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ stets ein Eigenwert λ und ein zugehöriger Eigenvektor x bezüglich A, B derart existieren, daß $|\lambda^* - \lambda| \leq \varepsilon$ und $\|x\| \leq \delta$ gilt.

2.2. Satz (Prinzip der Linearisierung)

Vor.: Es seien die Operatoren $A, B: X \rightarrow Y$, $A(0)=B(0)=0$, im Nullpunkt differenzierbar und $A'(0)$ sei ungleich der Nullabbildung.

Beh.: Jeder Bifurkationspunkt bezüglich A, B ist ein Eigenwert bezüglich $A'(0), B'(0)$,

Bew.: Es sei $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$ kein Eigenwert bezüglich $A'(0)$, $B'(0)$.

Dann existiert eine Konstante $\alpha > 0$ mit

$$\|\tilde{\lambda} A'(0)x - B'(0)x\| \geq \alpha \|x\| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sei nun $r > 0$ derart gewählt, daß für $x \in X$ mit $\|x\| \leq r$ gilt:

$$\|Ax - A'(0)x\| \leq (1/(\alpha + 4|\tilde{\lambda}| \|A'(0)\|)) \alpha \cdot \|A'(0)\| \|x\| \quad \text{und}$$

$$\|Bx - B'(0)x\| \leq \frac{1}{4} \alpha \|x\|.$$

Sei nun $\lambda \in \mathbb{R}$ gewählt mit: $\frac{1}{4 \|A'(0)\|} \cdot \alpha > |\lambda - \tilde{\lambda}|.$

Für derartige $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in X$ mit $0 < \|x\| \leq r$ gilt:

$$\|\lambda Ax - Bx\| =$$

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\lambda} A'(0)x - B'(0)x - (Bx - B'(0)x) + (\lambda - \tilde{\lambda}) A'(0)x + \lambda Ax - \tilde{\lambda} A'(0)x\| \\ & \geq \alpha \|x\| - (1/4)\alpha \|x\| - (1/4)\alpha \|x\| - (1/4)\alpha \|x\| > 0. \end{aligned}$$

Es ist daher $\tilde{\lambda}$ kein Bifurkationspunkt bezüglich A , B .

Bis zum Ende von Paragraph 2 sei nun X ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum und Y ein reeller separabler Hilbertraum. Es existiert in X eine aufsteigende Folge endlich-dimensionaler Unterräume mit in X dichter Vereinigung. Es bezeichne $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine derartige Folge und es gelte o.B.d.A. für $n \in \mathbb{N}$:
 $\dim X_n = n.$

2.3. Definition

Sei $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ein Funktional.

Für $R \in \mathbb{R}$ sei definiert:

$$\begin{aligned} \underline{\partial g_R} &:= \{x \in X \mid g(x) = R\} \\ \underline{\partial g_{R,n}} &:= \{x \in \underline{\partial g_R} \wedge x \in X_n\}. \end{aligned}$$

2.4. Lemma

Vor.: Es sei $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0)=0$, ein Funktional.

Es erfülle g die folgenden Bedingungen:

- (i) Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $g(x) \geq c \|x\|^2$, $x \in X$.
- (ii) Sei $R > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $g(x) \neq g(sx)$, $x \in \partial g_{R,n}$, $s > 1$.
- (iii) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $g_n := g|_{X_n}$ ist stetig auf X_n .

Beh.: Für $R > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Die Abbildung $K_n: \partial g_{R,n} \rightarrow S_{n-1} := \{x \in X_n \mid \|x\| = 1\}$

definiert durch: $K_n(x) := (1/\|x\|) \cdot x$ ist ein Homöomorphismus von $\partial g_{R,n}$ auf S_{n-1} bezüglich der durch die Normtopologie auf X induzierten Topologien auf $\partial g_{R,n}$ und S_{n-1} .

Bew.: Sei $R > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.

Da $0 \notin \partial g_{R,n}$ und $\partial g_{R,n}$ abgeschlossen in X_n ist K_n wohldefiniert, und es existiert eine Konstante $\gamma > 0$ mit $\|x\| \geq \gamma > 0$ für $x \in \partial g_{R,n}$.

Daher: $\|K_n(x) - K_n(y)\| \leq \frac{2}{\gamma} \|x - y\|$ für $x, y \in \partial g_{R,n}$.

Hieraus folgt die Stetigkeit von K_n .

Sei nun $z \in S_{n-1} \subset X_n$ beliebig gewählt. Aus den Voraussetzungen (i), (iii) über g folgt: Es existiert ein $\tau > 0$ mit $g_n(\tau z) = R$.

Weiterhin gilt: $K_n(\tau z) = z$. Somit ist K_n surjektiv.

Mit Voraussetzung (ii) über g folgt: K_n ist injektiv.

Es existiert daher zu jedem $z \in S_{n-1}$ genau ein $\tau(z) > 0$ mit $\tau(z)z \in \partial g_{R,n}$ und $K_n(\tau(z)z) = z$. Damit hat die Umkehrabbildung K_n^{-1} die Form: $K_n^{-1}(z) = \tau(z)z$. Zu zeigen bleibt: K_n^{-1} ist stetig.

Sei $(z_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset S_{n-1}$ eine in S_{n-1} konvergente Folge mit $z_i \rightarrow z$.

Da $z \in S_{n-1}$, existiert genau ein $\tau(z) > 0$ mit $\tau(z)z \in \partial g_{R,n}$ und $K_n^{-1}(z) = \tau(z)z$. Für $i \in \mathbb{N}$ sei $\tau(z_i) > 0$ definiert durch: $K_n^{-1}(z_i) = \tau(z_i)z_i$. Die Folge $(\tau(z_i))_{i \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, da $\partial g_{R,n}$ beschränkt. Somit existiert eine konvergente Teilfolge $(\tau(z_{i_k}))_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\tau(z_{i_k}) \rightarrow \tau^*$.

Es gilt: $\tau(z_{i_k})z_{i_k} \rightarrow \tau^*z \in \partial g_{R,n}$. Dies bedeutet, da $\tau(z)$ eindeutig bestimmt: $\tau(z) = \tau^*$. Hieraus folgt: $\tau(z_i) \rightarrow \tau(z)$. Dies impliziert die Stetigkeit der Umkehrabbildung K_n^{-1} .

2.5. Lemma

Vor.: Sei $A: X \rightarrow Y$, $A(0)=0$, ein ungerader, schwach stetiger, im Nullpunkt differenzierbarer Operator. Es sei $T: X \rightarrow Y$ ein linearer, beschränkter, injektiver Operator. Es sei A ein T -Potentialoperator eines Funktionals $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0)=0$, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $g(x) \geq c\|x\|^2$, $x \in X$.
- (ii) Sei $R > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $g(x) \neq g(sx)$, $x \in \partial g_{R,n}$, $s > 1$.

Beh.: a) Es existiert $R_0 > 0$ mit:

$\partial g_{R,n}$ ist eine C^1 -Mannigfaltigkeit für $0 < R \leq R_0$ und $n \in \mathbb{N}$.
Sei nun $0 < R \leq R_0$.

b) Für den zur Mannigfaltigkeit $\partial g_{R,n}$ und zur Äquivalenzrelation $x \sim -x$ gehörigen Quotientenraum $\widetilde{\partial g_{R,n}}$ gilt:

Es ist $\widetilde{\partial g_{R,n}}$ eine topologische Mannigfaltigkeit, die sich mit einer differenzierbaren Struktur ausstatten läßt, bezüglich der die kanonische Projektion $\pi: \partial g_{R,n} \rightarrow \widetilde{\partial g_{R,n}}$ ein lokaler C^1 -Diffeomorphismus ist.

c) Es ist $\widetilde{\partial g_{R,n}}$ homöomorph dem $(n-1)$ -dimensionalen reellen Projektiven Raum $\widetilde{S_{n-1}}$.

Bew.: a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $p_n: Y \rightarrow T(X_n)$ die Projektion auf den n -dimensionalen Unterraum $T(X_n)$ von Y . Es sei $j_n: T(X_n) \rightarrow Y$ die dazu duale Injektion. Sei $g_n := g|_{X_n}$, $A_n := A|_{X_n}$, $T_n := T|_{X_n}$.

Mit Definition 1.1. folgt: Es ist $p_n A_n T_n$ -Potentialoperator von g_n . Die Abbildung $p_n A_n: X_n \rightarrow T(X_n)$ ist stetig.

Dies impliziert nach Lemma 1.6.: $g_n \in C^1$.

Sei $r_0 > 0$ derart gewählt, daß gilt:

$$\|Ax - A'(0)x\| \leq (1/2 \|T\|) \cdot c \|x\| \text{ für } x \in X \text{ mit } \|x\| \leq r_0.$$

Sei $R_0 := cr_0^2$. Sei nun $0 < R \leq R_0$ gewählt.

Für jedes $x \in \partial g_{R,n}$ gilt: $\|x\| \leq r_0$. Somit folgt mit Abschätzung II) aus Lemma 1.7.:

$$|g(x) - \frac{1}{2} \langle Ax, Tx \rangle| \leq \frac{1}{2} c \|x\|^2 \text{ für } x \in \partial g_{R,n}, \text{ d.h.}$$

$$|R - \frac{1}{2} \langle p_n A_n x, T_n x \rangle| \leq \frac{R}{2}. \text{ Hieraus folgt: } g'_{n_x}(x) \geq R > 0, x \in \partial g_{R,n}.$$

Daher ist R regulärer Wert von g_n und damit $g_n^{-1}(R) = \partial g_{R,n}$ eine C^1 -Mannigfaltigkeit.

b) Da A ungerade, ist g ein gerades Funktional.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und $R > 0$ enthält $\partial g_{R,n}$ mit x auch den Antipodenpunkt $-x$. Für die Behauptung siehe dann z.B.

BRÖCKER, JÄNICH, Einführung in die Differentialtopologie, Springer (1973), p11. Insbesondere ist dann auch $\widetilde{\partial g_{R,n}}$ eine C^1 -Mannigfaltigkeit für $n \in \mathbb{N}$ und $0 < R \leq R_0$.

c) Folgt aus Lemma 2.4.

2.6. Definition (LUSTERNIK, SCHNIERELMANN [13])

Sei V eine Teilmenge eines topologischen Raumes W . Die Lusternik-Schnierelmann-Kategorie von V in W

(in Zeichen: $\text{Kat}(V, W)$) ist diejenige kleinste natürliche Zahl n für die gilt: V läßt sich von n in W abgeschlossenen und zusammenziehbaren Untermengen überdecken. Existiert keine derartige natürliche Zahl, so sei definiert: $\text{Kat}(V, W) := \infty$.

2.7. Bemerkung (LUSTERNIK, SCHNIERELMANN [13])

Es werden die folgenden Aussagen über die Lusternik-Schnierelmann-Kategorie benötigt:

a) Es seien W_1, W_2 zwei topologische Räume. Sei $h: W_1 \rightarrow W_2$ ein Homöomorphismus. Dann gilt für jede Teilmenge V_1 von W_1 :
 $\text{Kat}(V_1, W_1) = \text{Kat}(h(V_1), W_2)$.

Sei für $n \in \mathbb{N}$ $\tilde{S}_{n-1}$ der $(n-1)$ -dimensionale reelle projektive Raum. Dann gilt:

b) In $\tilde{S}_{n-1}$ existieren Mengen der Kategorie k mit $1 \leq k \leq n$.

c) Für alle Teilmengen M von $\tilde{S}_{n-1}$ gilt: $\text{Kat}(M, \tilde{S}_{n-1}) = \text{Kat}(M, \tilde{S}_n)$.

2.8. Definition

Sei $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ ein gerades Funktional. Es existiere ein $R \in \mathbb{R}$ derart, daß $\partial g_{R,n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine $(n-1)$ -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit ist. Dann seien für jedes $j \in \mathbb{N}$ $j \leq n$ die folgenden Mengenklassen definiert:

$$\left[\widetilde{S_g(R)} \right]_{j,n} := \left\{ \tilde{S} \subset \partial g_{R,n} \mid \tilde{S} \text{ kompakt, } \text{Kat}(\tilde{S}, \partial g_{R,n}) \geq j \right\}$$

2.9. Lemma

Vor.: Wie in Lemma 2.5.

Beh.: Sei R_0 wie in Lemma 2.5. definiert und $0 < R \leq R_0$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $j \leq n$ aus $\mathbb{N}$ gilt: $\left[\widetilde{S_g(R)} \right]_{j,n} \neq \emptyset$.

Bew.: Folgt mit Lemma 2.5.c und Bemerkung 2.7.

2.10. Satz

Vor.: Sei $A: X \rightarrow Y$, $A(0)=0$, ein ungerader, schwach stetiger, im Nullpunkt differenzierbarer Operator. Sei $T: X \rightarrow Y$ ein linearer, beschränkter, injektiver Operator mit $T(X)$ dicht in Y . Es sei A ein T -Potentialoperator eines Funktionals $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0)=0$, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $g(x) \geq c \|x\|^2$, $x \in X$.

(ii) Sei $R > 0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $g(x) \neq g(sx)$, $x \in \mathcal{G}_{R,n}$, $s > 1$.

Es sei $B: X \rightarrow Y$, $B(0)=0$, ein ungerader, schwach stetiger T -Potentialoperator eines schwach nach oben halbstetigen Funktionals f , $f(0)=0$.

Beh.: Es existiert ein $R_0 > 0$ derart, daß für alle $0 < R \leq R_0$ und jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt:

a) Zu jedem $n \geq j$ aus $\mathbb{N}$ existiert ein $x_{j,n}(R) \in \mathcal{G}_{R,n}$ mit:

$$f(x_{j,n}(R)) = \sup_{[\tilde{S}_g(R)]_{j,n}} \min_{\tilde{S}} f(\tilde{x}),$$

wobei $f(\tilde{x}) := f(x) = f(-x)$ und $x, -x$ Antipodenpunkte zu $\tilde{x}$.

Weiterhin existiert ein $\lambda_{j,n}(R) \in \mathbb{R}$ mit:

$$\lambda_{j,n}(R) p_n A x_{j,n}(R) = p_n B x_{j,n}(R),$$

wobei $p_n: Y \rightarrow T(X_n)$ die im Beweis zu Lemma 2.5. eingeführte Projektion.

b) Existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 \geq j$ mit $f(x_{j,n_0}(R)) > 0$, so existiert ein schwacher Häufungswert $x_j(R) \neq 0$ der Folge $(x_{j,n}(R))_{n \geq j}$ und ein $\lambda_j(R) \in \mathbb{R}$ mit: $\lambda_j(R) A x_j(R) = B x_j(R)$.

Es gilt: $0 < \|x_j(R)\| \leq (R/c)^{1/2}$ und es ist $\lambda_j(R)$ Häufungswert der Folge $(\lambda_{j,n}(R))_{n \geq j}$.

Bew.: Sei $0 < R \leq R_0$, wobei R_0 wie in Lemma 2.5. festgelegt.

Sei $j \in \mathbb{N}$ fest gewählt.

a) Sei $n \gg j$ aus $\mathbb{N}$. Sei $f_n := f|_{X_n}$. Wie im Beweis zu Lemma 2.5.

gezeigt, läßt sich aus der schwachen Stetigkeit von B folgern:

$f_n \in C^1$. Sei $\tilde{f}_n: \partial \widetilde{g_{R,n}} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$\tilde{f}_n(\tilde{x}) := f_n(x) = f_n(-x)$, wobei $x, -x \in \partial g_{R,n}$ die Antipoden-

punkte zu $\tilde{x}$ sind. Da $\partial g_{R,n}$ lokal C^1 -diffeomorph zu $\partial \widetilde{g_{R,n}}$,

gilt: $\tilde{f}_n \in C^1$. Es ist $\tilde{x} \in \partial \widetilde{g_{R,n}}$ genau dann ein stationärer

Punkt von $\tilde{f}_n$, falls die Antipodenpunkte $x, -x$ zu $\tilde{x}$ stationäre

Punkte von $f|_{\partial g_{R,n}}$ sind.

Es ist daher $\tilde{f}_n: \partial \widetilde{g_{R,n}} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein C^1 -Funktional auf einer

C^1 -Mannigfaltigkeit, die nach Lemma 2.9. Mengen jeder Kategorie

kleiner oder gleich n enthält. Aus der endlich-dimensionalen

Lusternik-Schnierelmann-Theorie folgt: (LUSTERNIK,

SCHNIERELMANN [15], VAINBERG [18]) Es existiert ein Punkt

$\tilde{x}_{j,n}(R) \in \partial \widetilde{g_{R,n}}$ mit:

$$\tilde{f}_n(\tilde{x}_{j,n}(R)) = \sup_{[\widetilde{S_g(R)}]_{j,n}} \min_{\tilde{S}} \tilde{f}_n(\tilde{x}), \text{ und es ist } \tilde{x}_{j,n}(R)$$

stationärer Punkt von $\tilde{f}_n$. Somit sind die zu $\tilde{x}_{j,n}(R)$ gehörigen

Antipodenpunkte $x_{j,n}(R), -x_{j,n}(R)$ stationäre Punkte von $f|_{\partial g_{R,n}}$.

Sei nun $z \in X_n$. Aus $0 = g'_{n, x_{j,n}(R)}(z) = \langle p_n A x_{j,n}(R), T_n z \rangle$

folgt: Es ist z Element des Tangentialraumes von $\partial g_{R,n}$ in

$x_{j,n}(R)$. Daher: $0 = f'|_{\partial g_{R,n}}(z) = \langle p_n B x_{j,n}(R), T_n z \rangle$.

Es existiert somit ein $\lambda_{j,n}(R) \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_{j,n}(R) p_n A x_{j,n}(R) = p_n B x_{j,n}(R).$$

b) Zu $n \geq j$ aus $\mathbb{N}$ bezeichne $(x_{j,n}(R))_{n \geq j}$, $(\lambda_{j,n}(R))_{n \geq j}$ die in Teil a) definierten Folgen. Es gilt, wie im Beweis zu Lemma 2.5. gezeigt: $\langle p_n A x_{j,n}(R), T_n x_{j,n}(R) \rangle \geq R > 0$ für $n \geq j$ aus $\mathbb{N}$. Es ist $(x_{j,n}(R))_{n \geq j}$ eine beschränkte Folge. Daher existiert eine schwach konvergente Teilfolge von $(x_{j,n}(R))_{n \geq j}$ die aus Notationsgründen ebenso bezeichnet werde. Dann ist $(B x_{j,n}(R))_{n \geq j}$ beschränkt und damit auch $(\lambda_{j,n}(R))_{n \geq j}$ eine beschränkte Folge, denn

$$\begin{aligned} \lambda_{j,n}(R) &= (1 / \langle p_n A x_{j,n}(R), T_n x_{j,n}(R) \rangle) \cdot \\ &\quad \cdot \langle p_n B x_{j,n}(R), T_n x_{j,n}(R) \rangle. \end{aligned}$$

Somit existiert eine konvergente Teilfolge von $(\lambda_{j,n}(R))_{n \geq j}$. Aus Notationsgründen werde nun angenommen:

$$x_{j,n}(R) \longrightarrow x_j(R) \in X, \quad \lambda_{j,n}(R) \longrightarrow \lambda_j(R) \in \mathbb{R}.$$

Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq j$ beliebig gewählt. Sei $z \in X_m$. Für $n \geq m$ aus $\mathbb{N}$ gilt: $Tz \in T(X_n)$. Somit:

$$\begin{aligned} \langle p_n A x_{j,n}(R), T_n z \rangle &= \langle A x_{j,n}(R), j_n T_n z \rangle = \langle A x_{j,n}(R), Tz \rangle \\ &\longrightarrow \langle A x_j(R), Tz \rangle, \end{aligned}$$

wobei j_n die zu p_n duale Injektion. Da $m \geq j$ aus $\mathbb{N}$ beliebig gewählt war, gilt:

$$\langle p_n A x_{j,n}(R), y \rangle \longrightarrow \langle A x_j(R), y \rangle \quad \text{für alle } y \in \bigcup_{m \geq j} T(X_m).$$

Da $\bigcup_{m \geq j} T(X_m)$ dicht in Y und $(p_n A x_{j,n}(R))_{n \geq j}$ beschränkt, folgt: $p_n A x_{j,n}(R) \longrightarrow A x_j(R)$ und daher:

$$\lambda_{j,n}(R) p_n A x_{j,n}(R) \longrightarrow \lambda_j(R) A x_j(R).$$

Ebenso läßt sich zeigen: $p_n B x_{j,n}(R) \longrightarrow B x_j(R)$.

Mit Beweisteil a) folgt nun: $\lambda_j(R) A x_j(R) = B x_j(R)$.

Existiert nun ein $n_0 \gg j$ aus $\mathbb{N}$ mit $f(x_{j,n_0}(R)) > 0$, so ist $f(x_{j,n}(R)) > 0$ für alle $n \gg n_0$ aus $\mathbb{N}$, da $(f(x_{j,n}(R)))_{n \gg j}$ nach Bemerkung 2.7.c eine isotone Folge. Da f schwach nach oben halbstetig, gilt: $f(x_j(R)) > 0$. Hieraus folgt $x_j(R) \neq 0$, da $f(0) = 0$. Da $x_{j,n}(R) \longrightarrow x_j(R)$ gilt: $\|x_j(R)\| \leq \liminf \|x_{j,n}(R)\| \leq (R/c)^{1/2}$.

2.11. Bemerkung

Sei $T: Y \longrightarrow Y$ ein bijektiver Operator. Ein schwach stetiger T -Potentialoperator eines schwach nach oben halbstetigen Funktionals ist i.a. nicht kompakt.

Denn: Wähle $B: Y \longrightarrow Y$ mit $B := K - \text{Id}_Y$, wobei K linear vollstetig, selbstadjungiert. Wähle $T := \text{Id}_Y$.

Es ist B schwach stetig, aber nicht kompakt. Es ist B Id_Y -Potentialoperator des schwach nach oben halbstetigen Funktionals $f: Y \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = \frac{1}{2}(\langle Ky, y \rangle - \|y\|^2)$.

2.12. Bemerkung

Sei $T: X \longrightarrow Y$ linear, beschränkt. Sei $B: X \longrightarrow Y$ ein vollstetiger T -Potentialoperator eines Funktionals f . Dann ist f schwach stetig.

2.13. Definition

Es seien $W, T: X \longrightarrow Y$ lineare, beschränkte Operatoren. Es heiße W T -hermitesch, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt:

$$\langle Wx_1, Tx_2 \rangle = \langle Wx_2, Tx_1 \rangle .$$

Es ist $\langle , \rangle$ das Innere Produkt in Y .

2.14. Beispiel

Es seien $W, T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch ihre Matrixdarstellung bezüglich einer Basis des $\mathbb{R}^2$ definiert, wobei

$$W := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist W T -hermitesch und natürlich T W -hermitesch.

2.15. Bemerkung

Sei $T: X \rightarrow Y$ linear, beschränkt. Es sei $A: X \rightarrow Y$ ein in einer Nullumgebung U stetig differenzierbarer T -Potentialoperator eines Funktionals g .

Dann ist $A'(0)$ T -hermitesch.

Denn: Seien $u, v \in K_f(0) \subset U \subset X$ beliebig. Das Funktional

$f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch: $f_{uv}(s,t) := g(su+tv)$.

Es gilt: $\frac{d}{ds} f_{uv}(s,t) = \langle A(su+tv), Tu \rangle,$

$$\frac{d}{dt} f_{uv}(s,t) = \langle A(su+tv), Tv \rangle.$$

Weiterhin: $\frac{d^2}{dsdt} f_{uv}(0,0) = \left\{ \frac{d}{ds} \langle A(su+tv), Tv \rangle \right\}_{(0,0)}$

$$= \left\langle \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} (Agu - A0), Tv \right\rangle = \langle A'(0)u, Tv \rangle.$$

Ebenso folgt: $\frac{d^2}{dt ds} f_{uv}(0,0) = \langle A'(0)v, Tu \rangle.$

Da A in U stetig differenzierbar, sind für $u, v \in K_f(0)$

die Funktionen $\frac{d^2}{dsdt} f_{uv}(s,t), \frac{d^2}{dt ds} f_{uv}(s,t)$ stetig für kleine s, t . Dies impliziert für derartige s, t die Gleichheit dieser Funktionen.

2.16. Lemma

Vor.: Es seien $W, T: X \rightarrow Y$ linear, beschränkt. Es sei W T -hermitesch.

Beh.: Es ist W T -Potentialoperator von $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{1}{2} \langle Wx, Tx \rangle.$

2.17. Korollar

Vor.: Es seien $S, T, W: X \longrightarrow Y$ lineare, beschränkte Operatoren.

Das Bild von X unter T liege dicht in Y . Es seien S, W

T -hermitesch. Für das Funktional $\varphi: X \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch:

$\varphi(x) := \frac{1}{2} \langle Sx, Tx \rangle$ gelte: Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $\varphi(x) \geq c \|x\|^2$ für $x \in X$.

Das Funktional $\psi: X \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch: $\psi(x) := \frac{1}{2} \langle Wx, Tx \rangle$ sei nicht negativ, d.h. es existiert ein $x \in X$ mit $\psi(x) > 0$.

Beh.: Es existiert eine Teilmenge $I \neq \emptyset$ von $\mathbb{N}$, so daß für alle $j \in I$ und alle $R > 0$ gilt:

a) Es existiert ein $n_j \geq j$ aus $\mathbb{N}$, so daß zu jedem $n \geq n_j$ aus $\mathbb{N}$ ein $z_{j,n}(R) \in \partial \varphi_{R,n}$ existiert mit:

$$\psi(z_{j,n}(R)) = \sup_{[S\varphi(R)]_{j,n}} \min_{\tilde{z}} \psi(\tilde{z}),$$

wobei $\psi(\tilde{z}) := \psi(z) = \psi(-z)$ und $z, -z$ Antipodenpunkte zu $\tilde{z}$.

Weiterhin existiert eine Zahl $\mathcal{L}_{j,n}^* > 0$ unabhängig von der Wahl von $R > 0$ mit:

$$\mathcal{L}_{j,n}^* p_n S z_{j,n}(R) = p_n W z_{j,n}(R).$$

b) Es existiert ein schwacher Häufungswert $z_j(R) \in X$ der Folge $(z_{j,n}(R))_{n \geq n_j}$ und ein $\mathcal{L}_j^* > 0$ unabhängig von R mit

$$\mathcal{L}_j^* S z_j(R) = W z_j(R).$$

Es ist $\mathcal{L}_j^*$ Grenzwert der konvergenten Folge $(\mathcal{L}_{j,n}^*)_{n \geq n_j}$.

c) Ist $I \subset \mathbb{N}$ nicht endlich, so gilt: $I = \mathbb{N}$ und es ist $(\mathcal{L}_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$ eine antitone Folge mit positivem Grenzwert.

Bew.: a) Mit Lemma 2.16. folgt: es ist S T -Potentialoperator von φ und W T -Potentialoperator von ψ . Aus der Voraussetzung über φ folgt die Injektivität von T . Es läßt sich

daher Satz 2.10. a) anwenden. Insbesondere ist die dort benutzte Konstante $R_0 := \infty$ wählbar, wie aus der Spezialisierung von Lemma 2.5. auf die gegebenen Voraussetzungen hervorgeht. So bleibt zu zeigen: Zu fest gewähltem $j \in \mathbb{N}$ gilt für jedes $n \geq j$ aus $\mathbb{N}$: $\lambda^*_{j,n}$ ist unabhängig von der Wahl von $R > 0$.

Seien $R, R' > 0$. Es sei $k > 0$ definiert durch: $k^2 R = R'$. Es definiert die Abbildung $u \rightarrow ku$ einen Homöomorphismus von $\partial\varphi_{R,n}$ auf $\partial\varphi_{R',n}$. Sei $\tilde{K}: \widetilde{\partial\varphi_{R,n}} \rightarrow \widetilde{\partial\varphi_{R',n}}$ der hierdurch induzierte Homöomorphismus. Mit Bemerkung 2.7.a) folgt:

$$\tilde{K}([S\tilde{\varphi}(R)]_{j,n}) = [S\tilde{\varphi}(R')]_{j,n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Daher: } \Psi(z_{j,n}(R')) &= \sup_{[S\tilde{\varphi}(R')]_{j,n}} \min_{\tilde{S}(R')} \Psi(\tilde{z}) = \\ &= \sup_{[S\tilde{\varphi}(R)]_{j,n}} \min_{\tilde{K}(\tilde{S}(R))} \Psi(\tilde{z}) = \\ &= \sup_{[S\tilde{\varphi}(R)]_{j,n}} \min_{\tilde{S}(R)} \Psi(\tilde{K}(\tilde{z})) = \\ &= k^2 \Psi(z_{j,n}(R)). \\ \lambda^*_{j,n}(R') &= \frac{1}{R'} \Psi(z_{j,n}(R')) = \frac{1}{k^2 R} \Psi(z_{j,n}(R)) \cdot k^2 = \\ &= \lambda^*_{j,n}(R). \end{aligned}$$

Für $j \in \mathbb{N}$ gilt entweder: $\lambda^*_{j,n} \leq 0$ für jedes $n \geq j$ aus $\mathbb{N}$, oder es existiert ein $n_j \in \mathbb{N}$ mit $\lambda^*_{j,n} > 0$ für alle $n \geq n_j$ aus $\mathbb{N}$, da $(\lambda^*_{j,n})_{n \geq j}$ nach Bemerkung 2.7.c) eine isotone Folge ist.

Es bezeichne I die Menge aller $j \in \mathbb{N}$ für die letzterer Fall gilt. Da Ψ nicht negativ, ist $I \neq \emptyset$.

b) Sei $j \in I$.

Da die Folge $(\lambda^*_{j,n})_{n \geq n_j}$ beschränkt und isoton ist, existiert der Grenzwert $\lambda^*_j > 0$ dieser Folge, der ebenfalls

unabhängig von der Wahl von R ist. Die Behauptung folgt nun mit Aussage 2.10.b). Da $z_j \neq 0$ nicht zu zeigen war, konnte auf die Forderung, Ψ schwach nach oben halbstetig zu wählen, verzichtet werden.

c) Sei I nicht endlich. Für $j \in I$ gilt: ist $n \geq j+1$, so folgt mit der Charakterisierung der $\mathcal{K}_{j,n}^*$: $\mathcal{K}_{j+1,n}^* \leq \mathcal{K}_{j,n}^*$. Dies impliziert: $\mathcal{K}_{j+1}^* \leq \mathcal{K}_j^*$. Mit der strikten Positivität der Folge $(\mathcal{K}_j^*)_{j \in I}$ folgt die Behauptung.

2.18. Bemerkung

Unter den Voraussetzungen von Korollar 2.17. sind die Operatoren S, T bijektiv. Denn:

Für jedes $x \in X$ gilt: $\langle Sx, Tx \rangle \geq c \|x\|^2$. Hieraus folgt:

$\|Tx\| \geq \frac{1}{\|S\|} \cdot c \cdot \|x\|$ für $x \in X$, da $S \neq \text{Nullabbildung}$. Da $T(X)$ dicht in Y , folgt: T ist bijektiv. Ebenso gilt:

$\|Sx\| \geq \frac{1}{\|T\|} \cdot c \cdot \|x\|$ für $x \in X$. Zu zeigen bleibt: $S(X)$ dicht in Y .

Annahme: Es existiert ein $y \in Y$ mit $y \notin S(X)$ und y hat die Darstellung $y = y_1 + y_2$, $y_1 \in S(X)$, $y_2 \in S(X)^\perp$, $y_2 \neq 0$.

Dann gilt für alle $x \in X$: $0 = \langle Sx, y_2 \rangle$.

Da T bijektiv, existiert ein $x_2 \neq 0$ mit $Tx_2 = y_2$.

Daher: $0 = \langle Sx_2, Tx_2 \rangle$. Widerspruch.

2.19. Bemerkung

Fordert man in Korollar 2.17. zusätzlich die schwache Oberhalbsteitigkeit von Ψ , so erhält man für $j \in I$: $z_j \neq 0$ und damit Lösungen des Eigenwertproblems $\mathcal{K}Sx = Wx$.

Die Sätze 2.21 und 2.22 erhellen die Bedeutung dieser zusätzlichen Voraussetzung.

2.20. Lemma (Kantorovitch)

Vor.: Sei Z ein separabler Hilbertraum. Sei $W: Z \rightarrow Y$ ein linearer beschränkter Operator. Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in Y gegen Null schwach konvergente Folge. Für alle derartigen Folgen gelte: $\|W*y_n\| \rightarrow 0$, falls $n \rightarrow \infty$.

Beh.: Es ist W vollstetig.

2.21. Satz

Vor.: Sei Z ein separabler Hilbertraum. Es seien $T, W: Z \rightarrow Y$ lineare, beschränkte Operatoren. Es sei T bijektiv und W T -hermitesch. Das Funktional $\psi(x) := \frac{1}{2} \langle Wx, Tx \rangle$ sei positiv und schwach nach oben halbstetig.

Beh.: Es ist W vollstetig.

Bew.: Der Operator $W*T: Z \rightarrow Z$ ist selbstadjungiert und positiv. Somit ist ψ schwach nach unten halbstetig. Hieraus folgt: ψ ist schwach stetig. Sei $(W*T)^{1/2}$ die positive Quadratwurzel des Operators $W*T$. Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in Z gegen Null schwach konvergente Folge. Mit der schwachen Stetigkeit von ψ folgt: $\langle (W*T)^{1/2} z_n, (W*T)^{1/2} z_n \rangle \rightarrow 0$

$$\implies \|(W*T)^{1/2} z_n\| \rightarrow 0 \implies (W*T)^{1/2} z_n \rightarrow 0$$

$$\implies W*T z_n = (W*T)^{1/2} ((W*T)^{1/2} z_n) \rightarrow 0.$$

Nach Lemma 2.20. bleibt zu zeigen:

Aus $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset Y$, $y_n \rightarrow 0$ in Y folgt: $\|W*y_n\| \rightarrow 0$.

Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in Y gegen Null schwach konvergente Folge.

Dann ist $(T^{-1}y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in Z gegen Null schwach konvergente Folge. Wie gezeigt, gilt: $W*y_n = W*T(T^{-1}y_n) \rightarrow 0$.

2.22. Satz (Vainberg)

Vor.: Sei $B: X \rightarrow X'$ der Gradient eines schwach stetigen Funktionals f .

Beh.: Es sind äquivalent:

- (i) B gleichmäßig stetig
- (ii) B verstärkt stetig

Hierbei ist X nicht notwendig separabel.

2.23. Hauptsatz

Vor.: Der Operator $T: X \rightarrow Y$ sei linear, beschränkt mit in Y dichtem Bild. Es sei $A: X \rightarrow Y$, $A(0)=0$, ein ungerader, schwach stetiger, im Nullpunkt differenzierbarer T -Potentialoperator eines Funktionals $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g(0)=0$. Es erfülle g die folgenden Bedingungen:

- (i) Es existiert eine Konstante $c > 0$ mit $g(x) \gg c \|x\|^2$, $x \in X$.
- (ii) Für $R > 0$ gilt: $g(x) \neq g(sx)$, falls $x \in \partial g_R$, $s > 1$.

Der Operator $A'(0)$ sei T -hermitesch.

Es sei $B: X \rightarrow Y$, $B(0)=0$, ein ungerader, schwach stetiger, im Nullpunkt differenzierbarer T -Potentialoperator eines schwach nach oben halbstetigen Funktionals $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0)=0$.

Der Operator $B'(0)$ sei T -hermitesch. Das Funktional $x \mapsto \langle B'(0)x, Tx \rangle_Y$ sei auf X nicht negativ.

Beh.: Es existiert entweder eine endliche nichtleere Menge oder eine antitone Folge positiver Bifurkationspunkte bezüglich A , B .

Bew.: Sei $\delta > 0$ derart gewählt, daß gilt:

$$\|A(x) - A'(0)x\| \leq \frac{1}{\|T\|} \cdot c \cdot \|x\| \quad \text{für } x \in X \text{ mit } \|x\| \leq \delta.$$

Hieraus folgt mit Lemma 1.7.I) :

$$\left| g(x) - \frac{1}{2} \langle A'(0)x, Tx \rangle \right| \leq \frac{1}{2} \cdot c \cdot \|x\|^2 \text{ und somit:}$$

$$\frac{1}{2} \langle A'(0)x, Tx \rangle \geq c \|x\|^2 - \frac{1}{2} \cdot c \cdot \|x\|^2 \text{ für alle } \|x\| \leq \delta$$

und daher für alle $x \in X$. Insbesondere gilt: T injektiv.

Mit $S := A'(0)$, $W := B'(0)$, $\Psi(x) = \frac{1}{2} \langle A'(0)x, Tx \rangle$ und

$\Psi(x) = \frac{1}{2} \langle B'(0)x, Tx \rangle$ sind die Voraussetzungen von

Satz 2.10. und Korollar 2.17. erfüllt. Es sei die nicht-leere Teilmenge I von $\mathbb{N}$ wie in Korollar 2.17. bestimmt.

Im weiteren sei $j \in I$ fest gewählt.

Es bezeichne $\lambda_{j,n_j}^* > 0$ den in 2.17.a) charakterisierten

Eigenwert der Gleichung $\lambda p_{n_j} Sx = p_{n_j} Wx$. Sei nun $\varepsilon > 0$ gewählt

mit: (1) $0 < \varepsilon < \lambda_{j,n_j}^*$. Es sei $r_j(\varepsilon) > 0$ derart bestimmt,

daß gilt:

$$(2) \|Ax - Sx\| \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon c^2}{2\|W\| \|T\|^2}, \frac{\varepsilon c^2}{\|W\| \|T\|^2 + \varepsilon c \|T\|} \right\} \|x\|$$

$$(3) \|Bx - Wx\| \leq \frac{\varepsilon c}{\|T\|} \|x\|$$

für alle $x \in X$ mit $\|x\| \leq r_j(\varepsilon)$. Dies ist möglich, da T, W

ungleich der Nullabbildung. Sei nun R_0 wie in Satz 2.10.

charakterisiert. Es sei $R_j(\varepsilon) := \min \{R_0, (r_j(\varepsilon))^2 c\}$.

Es gelten die Aussagen von 2.10. und 2.17. für alle $R \in \mathbb{R}$ mit

$0 < R \leq R_j(\varepsilon)$. Sei nun R derart gewählt. Sei $n > n_j$ aus $\mathbb{N}$

beliebig. Für jedes $x \in \partial g_{R,n}$ gelten die Abschätzungen (2), (3),

$$\text{da } \|x\|^2 \cdot c \leq g(x) = R \leq R_j(\varepsilon) \leq (r_j(\varepsilon))^2 \cdot c.$$

Mit Lemma 2.4. folgt: Es existiert ein Homöomorphismus h_n

von $\partial g_{R,n}$ auf $\partial \varphi_{R,n}$ bezüglich der durch die Normtopologie

auf X induzierten Topologien auf $\partial g_{R,n}$ und $\partial \varphi_{R,n}$. Es hat

$h_n : \partial g_{R,n} \rightarrow \partial \varphi_{R,n}$ die Form: $h_n(x) = k_n(x) \cdot x$, wobei

$k_n(x) > 0$ von x abhängig. Es gilt:

$$(4) \quad 1/(k_n(x))^2 = 1 - \frac{1}{R}(g_n(x) - \frac{1}{2} \langle S_n x, T_n x \rangle) \text{ für } x \in \partial g_{R,n},$$

wobei $g_n := g|_{X_n}$, $S_n := S|_{X_n}$ und $T_n := T|_{X_n}$.

Sei $\tilde{h}_n : \partial \tilde{g}_{R,n} \rightarrow \partial \tilde{\varphi}_{R,n}$ der durch h_n induzierte Homöomorphismus. Es sei nun $\tilde{S}_\varphi \in [\tilde{S}_\varphi(R)]_{j,n}$ beliebig gewählt. Mit Bemerkung 2.7.a) gilt: $\tilde{S}_g := \tilde{h}_n^{-1}(\tilde{S}_\varphi) \in [\tilde{S}_g(R)]_{j,n}$. Sei $\tilde{x} \in \tilde{S}_g$. Sei $\tilde{z} := \tilde{h}_n(\tilde{x})$. Sind $x, -x$ bzw. $z, -z$ Antipodenpunkte zu $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{z}$, so gilt: $k_n(x) \cdot \pm x = \pm z$.

Mit (2), (3), (4) und Lemma 1.7. erhält man die folgenden Abschätzungen. Hierbei sind f auf $\partial \tilde{g}_{R,n}$ und ψ auf $\partial \tilde{\varphi}_{R,n}$ wie bisher auf kanonische Weise definiert.

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &\geq \psi(\tilde{x}) - |f(\tilde{x}) - \psi(\tilde{x})| \\ &= (1/(k_n(x))^2) \psi(\tilde{z}) - |f(x) - \psi(x)| \\ &\geq \psi(\tilde{z}) (1 - \frac{1}{R}(g_n(x) - \frac{1}{2} \langle S_n x, T_n x \rangle)) - \frac{1}{2} \varepsilon c \|x\|^2 \\ &\geq \psi(\tilde{z}) - \frac{\langle Wz, Tz \rangle}{2R} - \frac{c^2 \varepsilon}{2\|W\| \|T\|} - \frac{1}{2} \varepsilon c \|x\|^2 \\ &\geq \psi(\tilde{z}) - \varepsilon c \|x\|^2 \geq \psi(\tilde{z}) - \varepsilon R \\ &\geq \min_{\tilde{S}_\varphi} \psi(\tilde{z}) - \varepsilon R. \end{aligned}$$

Da $\tilde{x} \in \tilde{S}_g$ beliebig gewählt war, gilt: $\min_{\tilde{S}_g} f(\tilde{x}) \geq \min_{\tilde{S}_\varphi} \psi(\tilde{z}) - \varepsilon R$.

Mit Satz 2.10.a) folgt: es existiert ein $x_{j,n}(R) \in \partial g_{R,n}$ derart, daß $f(x_{j,n}(R)) = \sup_{[\tilde{S}_g(R)]_{j,n}} \min_{\tilde{S}} f(\tilde{x}) \geq \min_{\tilde{S}_\varphi} \psi(\tilde{z}) - \varepsilon R$.

Andererseits war $\tilde{S}_\varphi \in [\tilde{S}_\varphi(R)]_{j,n}$ beliebig. Daher:

$$f(x_{j,n}(R)) \geq \sup_{[\tilde{S}_\varphi(R)]_{j,n}} \min_{\tilde{S}} \psi(\tilde{x}) - \varepsilon R = \mathcal{L}_{j,n}^* R - \varepsilon R.$$

Sei nun $\tilde{S}_g \in [\tilde{S}_g(R)]_{j,n}$ beliebig gewählt. Dann gilt: $\tilde{S}_\varphi := \tilde{h}_n(\tilde{S}_g) \in [\tilde{S}_\varphi(R)]_{j,n}$. Sei $\tilde{z} \in \tilde{S}_\varphi$. Sei $\tilde{x} := \tilde{h}_n^{-1}(\tilde{z})$. Seien $\pm x$ bzw. $\pm z$ die Antipodenpunkte von $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{z}$.

Es gilt: $k_n(x) \cdot (\pm x) = \pm z$. Analog zu den obigen Abschätzungen

läßt sich zeigen:

$$\min_{\tilde{S}_g} f(\tilde{x}) \leq f(\tilde{x}) \leq (1/(k_n(x))^2) \Psi(\tilde{z}) + |f(x) - \Psi(x)| \\ \leq \Psi(\tilde{z}) + \varepsilon R.$$

Da $\tilde{z} \in \tilde{S}_\varphi$ beliebig gewählt war, gilt:

$$\min_{\tilde{S}_g} f(\tilde{x}) \leq \min_{\tilde{S}_\varphi} \Psi(\tilde{z}) + \varepsilon R \leq \sup_{[\tilde{S}_\varphi(R)]_{j,n}} \min_{\tilde{S}} \Psi(\tilde{z}) + \varepsilon R = \\ = \lambda_{j,n}^* R + \varepsilon R.$$

Da $\tilde{S}_g \in [\tilde{S}_g(R)]_{j,n}$ beliebig gewählt war, folgt somit:

$$f(x_{j,n}(R)) \leq \lambda_{j,n}^* R + \varepsilon R. \text{ Daher:}$$

$$(5) \quad |R^{-1} f(x_{j,n}(R)) - \lambda_{j,n}^*| \leq \varepsilon.$$

$$\text{Weiter gilt: } \frac{2}{R^2} |g(x_{j,n}(R)) - \frac{1}{2} \langle p_n A x_{j,n}(R), T_n x_{j,n}(R) \rangle| \gg \\ \gg \left| \frac{2}{\langle p_n A x_{j,n}(R), T_n x_{j,n}(R) \rangle} - \frac{1}{R} \right|,$$

da, wie im Beweis zu Lemma 2.5. gezeigt,

$$\langle p_n A x_{j,n}(R), T_n x_{j,n}(R) \rangle \gg R.$$

Daher gilt nach (2), (3) und Lemma 1.7. die folgende Abschätzung:

$$(6) \quad |f(x_{j,n}(R))| \left| \frac{2}{\langle p_n A x_{j,n}(R), T_n x_{j,n}(R) \rangle} - \frac{1}{R} \right| \leq$$

$$\leq \left\{ \Psi(x_{j,n}(R)) + |f(x_{j,n}(R)) - \Psi(x_{j,n}(R))| \right\} \cdot$$

$$\cdot \left| g(x_{j,n}(R)) - \frac{1}{2} \langle p_n A x_{j,n}(R), T_n x_{j,n}(R) \rangle \right| \frac{2}{R^2} \\ \leq \varepsilon c^2 \|x_{j,n}(R)\|^4 \cdot 1/R^2 \leq \varepsilon.$$

Weiterhin:

$$(7) \quad 2/(\langle p_n A x_{j,n}(R), T_n x_{j,n}(R) \rangle) \left| \frac{1}{2} \langle p_n B x_{j,n}(R), T_n x_{j,n}(R) \rangle - \right.$$

$$\left. - f(x_{j,n}(R)) \right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{R} \varepsilon c \|x_{j,n}(R)\|^2 \leq 2\varepsilon.$$

Sei nun $\lambda_{j,n}(R)$ wie in Satz 2.10. a) charakterisiert. Es gilt:

$$\begin{aligned} |\lambda_{j,n}(R) - \lambda^*_{j,n}| &= \left| \frac{\langle p_n^{Bx_{j,n}(R)}, T_n^{x_{j,n}(R)} \rangle}{\langle p_n^{Ax_{j,n}(R)}, T_n^{x_{j,n}(R)} \rangle} - \lambda^*_{j,n} \right| \\ &\leq \left| \frac{f(x_{j,n}(R))}{\frac{1}{2} \langle p_n^{Ax_{j,n}(R)}, T_n^{x_{j,n}(R)} \rangle} - \lambda^*_{j,n} \right| + \\ &\quad \left| \frac{2 / (\langle p_n^{Ax_{j,n}(R)}, T_n^{x_{j,n}(R)} \rangle)}{\frac{1}{2} \langle p_n^{Bx_{j,n}(R)}, T_n^{x_{j,n}(R)} \rangle} - f(x_{j,n}(R)) \right| \end{aligned}$$

nach (5), (6), (7)

$$\leq 4\varepsilon.$$

Da $0 < \lambda^*_{j,n_j} - \varepsilon \leq R^{-1} f(x_{j,n_j}(R))$, folgt mit Satz 2.10.b)

und Korollar 2.17.b) für alle $0 < R \leq R_j(\varepsilon)$:

Es existiert eine strikt isotone Folge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ für die gilt:

$(x_{j,n_k}(R))_{k \geq n_j}$ ist eine schwach konvergente Teilfolge von

$(x_{j,n}(R))_{n \geq n_j}$ mit schwachem Grenzwert $x_j(R) \neq 0$ und

$$\|x_j(R)\| \leq (R/c)^{1/2}.$$

$(\lambda_{j,n_k}(R))_{k \geq n_j}$ ist eine konvergente Teilfolge von $(\lambda_{j,n}(R))_{n \geq n_j}$

mit Grenzwert $\lambda_j(R)$.

$(\lambda^*_{j,n_k})_{k \geq n_j}$ ist eine Teilfolge der gegen λ^*_j konvergenten

Folge $(\lambda^*_{j,n})_{n \geq n_j}$.

Es ist $\lambda_j(R)$ Eigenwert zum Eigenvektor $x_j(R)$ bezüglich A, B.

Es gilt: $|\lambda_j(R) - \lambda^*_j| \leq 4\varepsilon$, da $|\lambda_{j,n_k}(R) - \lambda^*_{j,n_k}| \leq 4\varepsilon$

für $k \in \mathbb{N}$. Für $j \in I$ ist daher λ^*_j Bifurkationspunkt bezüglich

A, B. Die Behauptung folgt mit Korollar 2.17.c).

2.24. Bemerkung

Mit Satz 2.2. folgt: Für $j \in I$ ist λ_j^* Eigenwert bezüglich $A'(0)$, $B'(0)$.

2.25. Bemerkung

Es gelte zusätzlich in Satz 2.23.: X ist separabler Hilbert-
raum; Ψ ist positiv. Dann ist $B'(0)$ vollstetig.

Denn: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\eta > 0$ mit:

$$|f(x) - \Psi(x)| \leq \frac{1}{2} \varepsilon \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } \|x\| \leq \eta$$

Es folgt: $f(x) \geq \Psi(x) - \frac{1}{2} \varepsilon \|x\|^2$.

Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in X gegen Null schwach konvergente Folge.

Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Daher existiert eine Konstante $k > 0$ mit $\|kx_n\| \leq \eta$ für jedes n aus $\mathbb{N}$. Es gilt:

$$0 = f(0) \geq \limsup_n f(kx_n) \geq \limsup_n (\Psi(kx_n) - \frac{1}{2} \varepsilon \|kx_n\|^2)$$

$$\text{Für alle } \varepsilon > 0 \text{ gilt: } \limsup_n k^2 \Psi(x_n) \leq \limsup_n \frac{1}{2} \varepsilon k^2 \|x_n\|^2.$$

Da Ψ positiv, folgt:

$$0 \geq \limsup_n \Psi(x_n) \geq \liminf_n \Psi(x_n) \geq 0. \quad \text{Daher: } \Psi(x_n) \rightarrow 0.$$

Der weitere Beweis verläuft wie in Satz 2.21.

2.26. Bemerkung

Ist in Satz 2.23. der Operator $B'(0)$ vollstetig, positiv, erhält
man alle Eigenwerte bezüglich $A'(0)$, $B'(0)$ durch das in

Korollar 2.17. beschriebene Verfahren. (vgl. [4], Lemma 10.6.)

Somit folgt aus Satz 2.23. für separable Räume der von

BERGER [4] formulierte Bifurkationssatz für Operatoren A , B
mit verstärkt stetigem nichtlinearen Teil.

§ 3 Bifurkation von Lösungen nichtlinearer Operatoren- gleichungen in nichtseparablen Räumen

In diesem Paragraph wird die Frage behandelt, unter welchen Voraussetzungen an die Operatoren A und B in Hauptsatz 2.23. auf die Separabilitätsbedingung an den Definitions- und Wertebereich von A, B verzichtet werden kann. Eine wichtige Rolle spielt bei dieser Untersuchung der Begriff des T-invarianten Unterraums zu einem Operator.

Es sei im folgenden X ein reeller reflexiver Banachraum, Y ein reeller Hilbertraum.

3.1. Definition

Es seien A, T: $X \longrightarrow Y$ Operatoren, T sei linear, beschränkt. Es sei U ein Unterraum von X. Es heißt U ein T-invarianter Unterraum zum Operator A, falls gilt: $A(U) \subseteq T(U)$.

3.2. Satz

Vor.: Es gelten die Voraussetzungen von Satz 2.10. Weiterhin sei der Operator T bijektiv. Es existiere ein separabler Unterraum X^S von X, der gleichzeitig T-invariant zu A und B ist.

Beh.: Es gelten die Behauptungen von Satz 2.10.

Bew.: Es ist $Y^S := T(X^S)$ ein separabler Unterraum von Y. Mit $X := X^S$, $Y := Y^S$ erfüllen die Restriktionen auf X^S von A, B, T, g, f die Voraussetzungen von Satz 2.10. Es sei $(X_n^S)_{n \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge endlich-dimensionaler

Unterräume von X^S für die gilt: $\dim X_n^S = n$ für jedes n aus $\mathbb{N}$ und $\bigcup_n X_n^S$ liegt dicht in X^S . Sei $p_n: Y^S \rightarrow T(X_n^S)$ der

Projektionsoperator. Sei nun zu passendem $R > 0$, zu jedem $j \in \mathbb{N}$ und für alle $n \geq j$ aus $\mathbb{N}$ $x_{j,n}(R) \in X_n^S$ und $\lambda_{j,n}(R) \in \mathbb{R}$ wie in 2.10. bestimmt. Es gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_{j,n}(R) p_n A x_{j,n}(R) &= \lambda_{j,n}(R) p_n A|_{X^S} x_{j,n}(R) = \\ &= p_n B|_{X^S} x_{j,n}(R) = p_n B x_{j,n}(R). \end{aligned}$$

Wie im Beweis zu 2.10. sei aus Notationsgründen angenommen:

$$x_{j,n}(R) \rightarrow x_j(R) \in X^S, \quad \lambda_{j,n}(R) \rightarrow \lambda_j(R).$$

Sei $m \geq j$ aus $\mathbb{N}$ beliebig gewählt. Sei $z \in T(X_m^S)$. Sei $n \geq m$ aus $\mathbb{N}$.

Für derartige n gilt: $z \in T(X_n^S)$. Daher:

$$\begin{aligned} \langle p_n A x_{j,n}(R), z \rangle &= \langle A x_{j,n}(R), j_n z \rangle = \langle A x_{j,n}(R), z \rangle \\ &\longrightarrow \langle A x_j(R), z \rangle, \text{ wobei } j_n \text{ die zu } p_n \text{ duale Injektion.} \end{aligned}$$

Da $m \in \mathbb{N}$, $m \geq j$ beliebig war, gilt:

$$\langle p_n A x_{j,n}(R), z \rangle \longrightarrow \langle A x_j(R), z \rangle \quad \text{für } z \in \bigcup_{m \geq j} T(X_m^S).$$

Da $\bigcup_{m \geq j} T(X_m^S)$ dicht in Y^S und $(p_n A x_{j,n}(R))_{n \geq j}$ beschränkt, folgt: $(p_n A x_{j,n}(R))_{n \geq j}$ konvergiert in Y^S schwach gegen $A x_j(R)$. Da $Y^S \supset A(X^S)$ nach Voraussetzung, gilt:

$(p_n A x_{j,n}(R))_{n \geq j}$ konvergiert in Y schwach gegen $A x_j(R)$.

Ebenso läßt sich zeigen: $p_n B x_{j,n}(R) \rightarrow B x_j(R)$ in Y .

Da $\lambda_{j,n}(R) p_n A x_{j,n}(R) = p_n B x_{j,n}(R)$, folgt:

$\lambda_j(R) A x_j(R) = B x_j(R)$. Der übrige Teil des Beweises verläuft wie in 2.10.b).

3.3. Korollar

Vor.: Es gelten die Voraussetzungen von Korollar 2.17.

Weiterhin existiere ein separabler Unterraum X^S von X , der gleichzeitig T -invariant zu S und W ist. Das Funktional $x \longrightarrow \langle Wx, Tx \rangle$ sei auf X^S nicht negativ.

Beh.: Es gelten die Behauptungen von Korollar 2.17.

Bew.: Folgt aus Satz 3.2. und Korollar 2.17.

3.4. Lemma

Vor.: Sei $B: X \longrightarrow Y$, $B(0) = 0$, ein im Nullpunkt differenzierbarer Operator.

Beh.: Ist $B(X)$ separabel, so ist auch $B'(0)(X)$ separabel.

Bew.: Mit $B(X)$ ist auch die lineare abgeschlossene Hülle $\overline{[B(X)]}$ in Y von $B(X)$ separabel. Sei die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dicht in $\overline{[B(X)]}$. Sei $z \neq 0$ aus $B'(0)(X)$ beliebig gewählt.

Sei $x \in (B'(0))^{-1}z$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\eta > 0$ mit:

$$\|B\eta x - \eta z\| \leq \varepsilon \|\eta x\|, \text{ wobei } \varepsilon := \frac{\varepsilon}{2\|x\|} > 0.$$

Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit: $\|(1/\eta)B\eta x - y_{n_0}\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$

Hieraus folgt: $\|B\eta x - \eta y_{n_0}\| \leq \eta \frac{\varepsilon}{2}.$

Somit: $\|\eta z - \eta y_{n_0}\| = \|\eta z - B\eta x + B\eta x - \eta y_{n_0}\|$
 $\leq (1/2\|x\|)\varepsilon \|\eta x\| + \eta \frac{\varepsilon}{2}$ und daher: $\|z - y_{n_0}\| \leq \varepsilon.$

Es gilt: $\overline{(y_n)_{n \in \mathbb{N}}} \supseteq B'(0)(X).$

3.5. Lemma

Vor.: Sei $B: X \longrightarrow Y$, $B(0)=0$, ein im Nullpunkt differenzierbarer Operator. Es sei $T: X \longrightarrow Y$ eine lineare, beschränkte Bijektion. Weiter sei U ein separabler T -invarianter Unterraum zum Operator B .

Beh.: Es ist U ein T -invarianter Unterraum zum Operator $B'(0)$.

Bew.: Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T(U)$ eine in $T(U)$ dichte Folge. Da $B(U)$ und somit $\overline{[B(U)]}$ Teilmenge von $T(U)$, gilt: $\overline{(y_n)_{n \in \mathbb{N}}} \supset \overline{[B(U)]}$.

Wie im Beweis zu Lemma 3.4. folgt hieraus:

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \supset B'(0)(U)$. Mit $\overline{(y_n)_{n \in \mathbb{N}}} = T(U)$ folgt die Behauptung.

3.6. Satz

Vor.: Es gelten die Voraussetzungen zu Hauptsatz 2.23.

Es existiere ein separabler Unterraum X^S von X , der gleichzeitig zu A und B T -invariant ist. Das Funktional $x \longrightarrow \langle B'(0)x, Tx \rangle$ sei auf X^S nicht negativ.

Beh.: Es gilt die Behauptung von Satz 2.23.

Bew.: Folgt aus Satz 2.23. mit den Sätzen 3.2., 3.3., 3.5.

3.7. Korollar

Vor.: Es gelten die Voraussetzungen von Hauptsatz 2.23.

Weiterhin gilt: Es sei $A = T$ eine lineare beschränkte Bijektion und B sei schwach stetig mit $B(X)$ separabel, oder B sei vollstetig. Das Funktional $x \longrightarrow \langle B'(0)x, Tx \rangle$ sei auf dem Unterraum $T^{-1}(\overline{B'(0)(X)} + \overline{[B(X)]})$ nicht negativ.

Beh.: Es existiert entweder eine endliche nichtleere Menge oder eine antitone Folge aus positiven Bifurkationspunkten bezüglich T , B .

Bew.: Da T bijektiv, folgt mit Lemma 3.4.:

$T^{-1}(B'(0)(X) + \overline{[B(X)]})$ ist ein separabler Unterraum von X , der zu T und B T -invariant ist. Für schwach stetige Operatoren B folgt die Behauptung aus Satz 3.6. Für den Fall, daß B vollstetig ist, muß noch gezeigt werden: $Bx_{j,n}(R) \longrightarrow Bx_j(R)$. Sei hierzu $R > 0$ passend gewählt. Zu $j \in I$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, daß gilt: $\lambda_{j,n}(R) > 0$ für $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Sei $G: X \setminus \{0\} \longrightarrow Y$ definiert durch: $Gx := Bx - \frac{\langle Bx, Tx \rangle}{\langle Tx, Tx \rangle} Tx$.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } Gx_{j,n}(R) &= Bx_{j,n}(R) - p_n Bx_{j,n}(R) + p_n Bx_{j,n}(R) - \\ &\quad - \lambda_{j,n}(R) p_n Tx_{j,n}(R) - \lambda_{j,n}(R) Tx_{j,n}(R) + \\ &\quad + \lambda_{j,n}(R) p_n Tx_{j,n}(R) \longrightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

$$\text{Daher: } Tx_{j,n}(R) = (1/\lambda_{j,n}(R))(Bx_{j,n}(R) - Gx_{j,n}(R))$$

und $(Tx_{j,n}(R))_{n \geq n_0}$ konvergiert stark in Y .

Weiterhin: $Tx_{j,n}(R) \longrightarrow Tx_j(R)$. Mit der Bijektivität von T folgt hieraus: $x_{j,n}(R) \longrightarrow x_j(R) \implies Bx_{j,n}(R) \longrightarrow Bx_j(R)$.

3.8. Bemerkung

Aus Korollar 3.7. erhält man den Bifurkationssatz von KRASNOSELS'KII [13] für ungerade Operatoren B . Da f in diesem Satz schwach stetig vorausgesetzt wird und damit schwach unterhalb stetig, ist jeder analog zu Korollar 2.17. mit Hilfe des "infmax-Prinzips" (anstelle des "supmin - Prinzips") gewonnene negative Eigenwert von $B'(0)$ Bifurkationspunkt der Gleichung $\lambda x = Bx$. Da $B'(0)$ vollstetig ist, erhält man auf diese Weise alle Eigenwerte von $B'(0)$. (vgl. [4], Lemma 10.6.)

Kapitel II

Anwendungen

§ 4 Eine Anwendung des verallgemeinerten Bifurkations-
satzes auf ein Problem aus der Deformations-
theorie elastischer Platten

Der Arbeit von BERGER [3] folgend, wird ein Problem aus der Theorie der elastischen Platten behandelt. Untersucht wird das Verhalten einer dünnen, flachen, elastischen Platte, auf deren Ränder eine Kraft wirkt. Man weiß, daß die Platte flach bleibt, bis die Kraft einen gewissen Wert erreicht hat. Dann beginnt die Platte sich zu biegen. Eine mathematische Beschreibung dieses Vorgangs geben die Von Karman-Gleichungen. Ein Spezialfall dieser Gleichungen lautet:

(A)

$$\begin{aligned} \Delta^2 f &= -[w, w] \\ \Delta^2 w &= \lambda [F, w] + [f, w] \end{aligned} \quad \text{auf } \mathcal{N}$$

$$\begin{aligned} w &= w_x = w_y = 0 \\ f &= f_x = f_y = 0 \end{aligned} \quad \text{auf } \partial \mathcal{N}$$

Hierbei ist Δ der Laplace-Operator und es ist definiert:

$$[h, g] := h_{xx}g_{yy} + h_{yy}g_{xx} - 2h_{xy}g_{xy}.$$

Diesen Gleichungen liegen folgende Annahmen über den physikalischen Sachverhalt zugrunde:

Die offene beschränkte Menge $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^2$ beschreibt die Gestalt der Platte. Die Summe der internen und externen Kräfte, die auf die flache Platte wirken, hängt von einem reellen Parameter λ ab. Die Funktion $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibt den Druck, der auf die flache Platte durch diese Kräfte ausgeübt wird.

Es hat F somit die Form: $F = \lambda F_0$. Hierbei ist F_0 eine der einzelnen Platte zugeordnete Funktion. Es beschreibt $f: \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Veränderung des Drucks auf die Platte, falls diese sich zu biegen beginnt. Die Funktion $w: \mathcal{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ beschreibt die Auslenkung der Platte aus ihrer flachen Position. Die Platte ist an ihrem Rand eingespannt. Es wird im folgenden gezeigt: Es existieren abzählbar viele positive Werte λ^* für die gilt: Wirkt die durch $\lambda^* F_0$ beschriebene Kraft auf die flache Platte, so beginnt diese sich zu biegen. Diese Werte λ^* sind Bifurkationspunkte einer dem Problem (A) zugehörigen nichtlinearen Operatorengleichung $\lambda Ax = Bx$.

4.1. Definition

Eine klassische Lösung des Problems (A) ist ein Paar von Funktionen (w, f) mit den Eigenschaften:

- (i) $w, f \in C^4(\mathcal{N}) \cap C^1(\bar{\mathcal{N}})$
- (ii) w, f erfüllen die Gleichungen von (A) punktweise für eine reelle Zahl λ .

4.2. Bemerkung

Es seien $f, g \in C^4(\mathcal{N})$. Dann gelten die Umformungen:

$$\begin{aligned}
 [f, g] &= (f_{yy}g_x - f_{xy}g_y)_x + (f_{xx}g_y - f_{xy}g_x)_y \\
 &= (f_{yy}g)_{xx} - 2(f_{xy}g)_{xy} + (f_{xx}g)_{yy}. \\
 [w, w] &= 2(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2) = 2(w_xw_{yy})_x - 2(w_xw_{xy})_y \\
 &= -(w_y^2)_{yy} + 2(w_xw_y)_{xy} - (w_y^2)_{xx}.
 \end{aligned}$$

4.3. Bezeichnung

Es sei $\mathcal{V}_{\mathcal{N}}$ die Menge aller reellwertigen C^∞ -Funktionen auf $\mathcal{N}$ mit in $\mathcal{N}$ kompaktem Träger.

Es sei $L_p(\mathcal{N})$ ($1 \leq p < \infty$) der Raum der auf $\mathcal{N}$ im Lebesgueschen Sinne zur p-ten Potenz summierbaren reellwertigen Funktionen.

Es sei für $m \geq 0$: $W_{m,p}(\mathcal{N}) = \{f \mid f \in L_p(\mathcal{N}), D^\alpha f \in L_p(\mathcal{N}), |\alpha| \leq m\}$.

Hierbei ist $D^\alpha f$ die Ableitung im Distributionssinne.

Bezüglich der Norm $\|f\|_{m,p} = (\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathcal{N}} |D^\alpha f|^p dx)^{1/p}$ ist $W_{m,p}(\mathcal{N})$ ein reflexiver separabler Banachraum.

Es ist $W_{m,2}(\mathcal{N})$ bezüglich des Inneren Produkts:

$$\langle f, g \rangle_{m,2} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathcal{N}} D^\alpha f D^\alpha g dx \text{ ein separabler Hilbertraum.}$$

Es bezeichne $\tilde{W}_{m,p}(\mathcal{N})$ den Abschluß von $\mathcal{V}_{\mathcal{N}}$ in der Norm $\|\cdot\|_{m,p}$.

Es ist $\tilde{W}_{m,p}(\mathcal{N})$ ein reflexiver separabler Banachraum.

4.4. Definition

Eine verallgemeinerte Lösung des Problems (A) ist ein Paar von Funktionen (w, f) mit:

(i) $w, f \in \tilde{W}_{2,2}(\mathcal{N})$

(ii) für alle Funktionen $\phi, \eta \in \mathcal{V}_{\mathcal{N}}$ erfüllt das Paar (w, f) die folgenden Integralgleichungen:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{N}} w_{xx} \eta_{xx} + 2w_{xy} \eta_{xy} + w_{yy} \eta_{yy} &= \int_{\mathcal{N}} (\bar{F}_{xy} w_y - \bar{F}_{yy} w_x) \eta_x + \\ &+ (\bar{F}_{xy} w_x - \bar{F}_{xx} w_y) \eta_y, \end{aligned}$$

$$\int_{\mathcal{N}} f_{xx} \phi_{xx} + 2f_{xy} \phi_{xy} + f_{yy} \phi_{yy} = 2 \int_{\mathcal{N}} w_x w_{yy} \phi_x - w_x w_{xy} \phi_y,$$

wobei $\bar{F} = \mathcal{L} F_0 + f$.

4.5. Satz (BERGER [3])

Jede klassische Lösung des Problems (A) ist eine verallgemeinerte Lösung von (A). Jede verallgemeinerte Lösung von (A) ist eine klassische Lösung von (A) für $\partial\Omega$ hinreichend glatt.

4.6. Satz

Es existieren Operatoren C und L derart, daß die verallgemeinerten Lösungen des Problems (A) identisch sind mit denjenigen Paaren von Funktionen (w,f), die die Operatorengleichungen

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \Delta w - C(w,f) &= Lw \\ \Delta f &= -C(w,w) \quad \text{lösen.} \end{aligned}$$

Hierbei ist: $\Delta: \mathring{W}_{2,2}(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$ der Laplace-Operator;

$L: \mathring{W}_{2,2}(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$ linear, beschränkt;

$C: \mathring{W}_{2,2}(\Omega) \times \mathring{W}_{2,2}(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$ linear in beiden

Variablen und beschränkt.

Weiterhin ist der Operator $\tilde{C}: \mathring{W}_{2,2}(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$ definiert durch: $\tilde{C}(w) := C(w,w)$ vollstetig.

Bew.: Zunächst wird gezeigt: $\Delta: \mathring{W}_{2,2}(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$ ist ein topologischer Isomorphismus.

$\Delta: \phi \longrightarrow \phi_{xx} + \phi_{yy}$ ist wohldefiniert, da die Ableitung im Distributionssinn eindeutig bestimmt. Weiterhin ist Δ linear.

Mit der Definition der Norm in $\mathring{W}_{2,2}$ folgt: Δ ist stetig.

Es ist Δ injektiv. Denn: Zu zwei Elementen $\phi_1, \phi_2 \in \mathring{W}_{2,2}(\Omega)$ mit $\phi_1 \neq \phi_2$ und $\phi_{1_{xx}} + \phi_{1_{yy}} = \phi_{2_{xx}} + \phi_{2_{yy}}$, existiert

ein $\eta \in \mathcal{V}_\Omega$ mit:

$$0 \neq \int_{\mathcal{U}} (\phi_1 - \phi_2)(\tau_{xx} + \tau_{yy}) = \int_{\mathcal{U}} (\phi_{1_{xx}} - \phi_{2_{xx}} + \phi_{1_{yy}} - \phi_{2_{yy}})\tau = 0.$$

Zur Surjektivität von Δ ist zu zeigen: Zu jedem $f \in L_2(\mathcal{U}) \setminus \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ existiert ein $\phi \in \mathring{W}_{2,2}(\mathcal{U})$ mit $\Delta(\phi) = f$.

Sei $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}$. Dann gilt: Ist $(\Delta \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L_2(\mathcal{U})$, so ist $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathring{W}_{2,2}(\mathcal{U})$. Sei nun $(\Delta \tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L_2(\mathcal{U})$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit:

Für alle $n, m \geq n_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \varepsilon > \int_{\mathcal{U}} (\tau_{n_{xx}} - \tau_{m_{xx}} + \tau_{n_{yy}} - \tau_{m_{yy}})^2 &= \\ \int_{\mathcal{U}} \tau_{n_{xx}}^2 - 2\tau_{n_{xx}}\tau_{m_{yy}} + 2\tau_{n_{xx}}\tau_{n_{yy}} - 2\tau_{n_{xx}}\tau_{m_{yy}} + \tau_{m_{xx}}^2 - 2\tau_{m_{xx}}\tau_{n_{yy}} + \\ + 2\tau_{m_{xx}}\tau_{m_{yy}} + \tau_{n_{yy}}^2 - 2\tau_{n_{yy}}\tau_{m_{yy}} + \tau_{m_{yy}}^2 &= \\ \int_{\mathcal{U}} (\tau_{n_{xx}} - \tau_{m_{xx}})^2 + (\tau_{n_{yy}} - \tau_{m_{yy}})^2 + 2(\tau_{n_{xy}} - \tau_{m_{xy}})^2 &\geq \end{aligned}$$

$$\geq C \|\tau_n - \tau_m\|_{2,2}^2 \quad \text{mit } C \text{ nur von } \mathcal{U} \text{ abhängig. (Poincaré-Ungleichung)}$$

Zu $f \in L_2(\mathcal{U})$ existiert $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ mit $\Delta \tau_n \rightarrow f$ in $L_2(\mathcal{U})$, da $\Delta(\mathcal{V}_{\mathcal{U}}) = \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ dicht in $L_2(\mathcal{U})$.

Wie gezeigt, ist $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathring{W}_{2,2}(\mathcal{U})$.

Mit der Vollständigkeit von $\mathring{W}_{2,2}(\mathcal{U})$ folgt die Existenz von $\phi \in \mathring{W}_{2,2}(\mathcal{U})$ mit $\tau_n \rightarrow \phi$. Mit der Stetigkeit von Δ folgt: $\Delta(\phi) = f$.

Somit ist Δ ein topologischer Isomorphismus von $\mathring{W}_{2,2}(\mathcal{U})$ auf $L_2(\mathcal{U})$.

Es werden nun die Operatoren C , L definiert. Für $w, g \in \mathring{W}_{2,2}(\mathcal{U})$ $\tau \in \mathcal{V}_{\mathcal{U}}$ ist der Ausdruck

$$\int_{\mathcal{U}} (g_{xy}w_y - g_{yy}w_x)\tau_x + (g_{xy}w_x - g_{xx}w_y)\tau_y \text{ linear in } \Delta \tau.$$

Da $\Delta(\mathcal{V}_{\mathcal{U}})$ dicht in $L_2(\mathcal{U})$ existiert nach dem Riesz'schen

Darstellungssatz genau ein Element $C(w, g) \in L_2(\mathcal{M})$ mit:

$$\langle C(w, g), \Delta \mathcal{Z} \rangle_{0,2} = \int_{\mathcal{M}} (g_{xy} w_y - g_{yy} w_x) \mathcal{Z}_x + (g_{xy} w_x - g_{xx} w_y) \mathcal{Z}_y.$$

Weiterhin ist durch $\langle Lw, \Delta \mathcal{Z} \rangle_{0,2} = \langle C(w, F_0), \Delta \mathcal{Z} \rangle_{0,2}$ ein

Element $Lw \in L_2(\mathcal{M})$ definiert. Diese Identitäten definieren

Operatoren $C: \hat{W}_{2,2}(\mathcal{M}) \times \hat{W}_{2,2}(\mathcal{M}) \longrightarrow L_2(\mathcal{M})$ und

$L: \hat{W}_{2,2}(\mathcal{M}) \longrightarrow L_2(\mathcal{M})$. Es ist C in beiden Variablen linear.

Daher ist auch L linear. Mit dem Sobolev'schen Einbettungs-

satz (vgl. VOIGT, WLOKA [19]) erhält man: $\hat{W}_{2,2}(\mathcal{M}) \subset \hat{W}_{1,4}(\mathcal{M})$.

Unter Anwendung der Hölder-Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned} \langle C(w, g), \Delta \mathcal{Z} \rangle_{0,2} &\leq \left[\left(\int_{\mathcal{M}} w_y^4 \right) \left(\int_{\mathcal{M}} \mathcal{Z}_x^4 \right) \left(\int_{\mathcal{M}} g_{xy}^2 \right)^2 \right]^{1/4} + \\ &\left[\left(\int_{\mathcal{M}} w_x^4 \right) \left(\int_{\mathcal{M}} \mathcal{Z}_y^4 \right) \left(\int_{\mathcal{M}} g_{xy}^2 \right)^2 \right]^{1/4} + \left[\left(\int_{\mathcal{M}} w_x^4 \right) \left(\int_{\mathcal{M}} \mathcal{Z}_x^4 \right) \left(\int_{\mathcal{M}} g_{yy}^2 \right)^2 \right]^{1/4} + \\ &\left[\left(\int_{\mathcal{M}} w_y^4 \right) \left(\int_{\mathcal{M}} \mathcal{Z}_y^4 \right) \left(\int_{\mathcal{M}} g_{xx}^2 \right)^2 \right]^{1/4} \leq \\ &\leq 4 \left[\left(\sum_{|s| \leq 1} \int_{\mathcal{M}} (D^s w)^4 \right) \left(\sum_{|s| \leq 1} \int_{\mathcal{M}} (D^s \mathcal{Z})^4 \right) \left(\sum_{|s| \leq 2} \int_{\mathcal{M}} (D^s g)^2 \right)^2 \right]^{1/4} \\ &= 4 \|w\|_{1,4} \|\mathcal{Z}\|_{1,4} \|g\|_{2,2}. \end{aligned}$$

Somit ist C und daher auch L ein beschränkter Operator.

Es wird nun die Vollstetigkeit des Operators $\tilde{C}(w) := C(w, w)$

gezeigt. Da $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}$ dicht in $\hat{W}_{2,2}(\mathcal{M})$, folgt mit Bemerkung 4.2.

für $w \in \hat{W}_{2,2}(\mathcal{M})$ und $\mathcal{Z} \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}$:

$$\langle \tilde{C}(w), \Delta \mathcal{Z} \rangle_{0,2} = \int_{\mathcal{M}} -w_x^2 \mathcal{Z}_{yy} + 2w_x w_y \mathcal{Z}_{xy} - w_y^2 \mathcal{Z}_{xx}.$$

Sei $(w^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $\hat{W}_{2,2}(\mathcal{M})$ gegen $w^{(0)}$ schwach konvergente Folge. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|\tilde{C}(w^{(n)}) - \tilde{C}(w^{(0)})\|_{0,2} &= \sup_{\substack{\|\Delta \Phi\|_{0,2}=1 \\ \Phi \in \mathcal{V}_{\mathcal{M}}}} \langle \tilde{C}(w^{(n)}) - \tilde{C}(w^{(0)}), \Delta \Phi \rangle_{0,2} \\ &= \sup_{\|\Delta \Phi\|_{0,2}=1} \left(\int_{\mathcal{M}} (w_x^{(n)} - w_x^{(0)})^4 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{M}} \Phi_{yy}^2 \right)^{1/2} + \\ &\quad + 2 \left(\int_{\mathcal{M}} (w_x^{(n)})^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\mathcal{M}} (w_y^{(n)} - w_y^{(0)})^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\mathcal{M}} \Phi_{xy}^2 \right)^{1/2} + \end{aligned}$$

$$+ \sup_{\|\Delta\phi\|_{0,2}=1} 2 \left(\int_{\Omega} (w_y^{(0)})^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} (w_x^{(n)} - w_y^{(0)})^4 \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} \phi_{xy}^2 \right)^{1/2} + \\ + \left(\int_{\Omega} (w_y^{(n)} - w_y^{(0)})^4 \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \phi_{xx}^2 \right)^{1/2}.$$

Mit dem Sobolev'schen Einbettungssatz folgt: Es konvergiert $(w^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in $\tilde{W}_{1,4}(\Omega)$ stark gegen $w^{(0)}$. Die obige Ungleichung impliziert daher: $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{C}(w^{(n)}) - \tilde{C}(w^{(0)})\|_{0,2} = 0$.

Weiter gilt für $w \in \tilde{W}_{2,2}(\Omega), \eta \in \mathcal{V}_{\Omega}$:

$$\langle \Delta w, \Delta \eta \rangle_{0,2} = \int_{\Omega} (w_{xx} + w_{yy})(\eta_{xx} + \eta_{yy}) = \\ = \int_{\Omega} w_{xx} \eta_{xx} + w_{yy} \eta_{yy} + w_{xy} \eta_{xy} + w_{yx} \eta_{yx} = \int_{\Omega} w_{xx} \eta_{xx} + 2w_{xy} \eta_{xy} + w_{yy} \eta_{yy}.$$

Die Integralgleichungen aus Definition 4.4. haben somit die Form:

$$\langle \Delta w - C(w, f) - \Lambda I w, \Delta \eta \rangle_{0,2} = 0 \\ \langle \Delta f + C(w, w), \Delta \phi \rangle_{0,2} = 0$$

für $w, f \in \tilde{W}_{2,2}(\Omega), \eta, \phi \in \mathcal{V}_{\Omega}$. Dies beweist die Behauptung.

4.7. Bemerkung

Seien $f, g, h \in \tilde{W}_{2,2}(\Omega)$. Dann gilt:

$$\langle C(f, g), \Delta h \rangle_{0,2} = \int_{\Omega} (g_{xy} f_y - g_{yy} f_x) h_x + (g_{xy} f_x - g_{xx} f_y) h_y.$$

4.8. Lemma

Vor.: Seien $f, g, h \in \tilde{W}_{2,2}(\Omega)$.

Beh.: Die Form $\langle C(f, g), \Delta h \rangle_{0,2}$ ist symmetrisch in f, g, h .

Bew.: Seien zunächst $f, g, h \in \mathcal{V}_{\Omega}$. Mit Bemerkung 4.2. folgt:

$$\langle C(f, g), \Delta h \rangle_{0,2} = \int_{\Omega} [f, g] h = \int_{\Omega} [g, f] h = \int_{\Omega} [g, h] f.$$

Hieraus folgt die Behauptung, da $\mathcal{V}_{\Omega}$ dicht in $\tilde{W}_{2,2}(\Omega)$ und mit $f_n \rightarrow f$ in $\tilde{W}_{2,2}(\Omega)$ gilt:

$$D^s f_n \rightarrow D^s f \text{ in } L_2(\Omega) \text{ für } |s| \leq 2.$$

4.9. Definition

Sei der Operator $\check{C}: \overset{\circ}{W}_{2,2}(\mathcal{N}) \longrightarrow L_2(\mathcal{N})$ definiert durch:

$$\check{C}(w) := C(w, \Delta^{-1}C(w, w))$$

Mit Lemma 4.8. gilt: $\langle \check{C}(w), \Delta w \rangle_{0,2} = \langle C(w, \Delta^{-1}C(w, w)), \Delta w \rangle_{0,2} = \langle C(w, w), C(w, w) \rangle_{0,2} = \|C(w, w)\|_{0,2}^2$.

4.10. Bemerkung

Die Operatorengleichungen aus Satz 4.6. haben die Form:

$$\begin{aligned} \Delta w + \check{C}(w) &= \mathcal{L}w \\ f &= -\Delta^{-1}C(w, w). \end{aligned}$$

Es genügt daher, die erste der beiden Gleichungen zu lösen.

4.11. Satz

Vor.: Das Funktional $\Psi: \overset{\circ}{W}_{2,2}(\mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $\Psi(x) := \langle \mathcal{L}x, \Delta x \rangle_{0,2}$ sei strikt positiv.

Beh.: Es besitzt die Gleichung $\Delta w + \check{C}(w) = \mathcal{L}w$ abzählbar viele positive Bifurkationspunkte mit Häufungswert im Unendlichen.

Bew.: Es wird zunächst die Gleichung $\mathcal{L}(\Delta w + \check{C}(w)) = \mathcal{L}w$ betrachtet. Zu zeigen ist: $A := \Delta + \check{C}$, $B := \mathcal{L}$, $T := \Delta$

erfüllen die Voraussetzungen von Hauptsatz 2.23. Es gilt für $w \in \overset{\circ}{W}_{2,2}(\mathcal{N})$, $s \in \mathbb{R}$: $\check{C}(sw) = s^3 \check{C}(w)$. Somit folgt: Es ist A ein ungerader Operator mit $A(0) = 0$. Es ist A ein schwach stetiger Operator, da $\check{C}$ schwach stetig ist:

Sei nämlich $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $\overset{\circ}{W}_{2,2}(\mathcal{N})$ gegen w_0 schwach konvergente Folge. Mit $\phi \in \overset{\circ}{V}_0$ gilt nach Lemma 4.8.:

$\langle \check{C}(w_n), \Delta \phi \rangle_{0,2} = \langle C(w_n, \phi), C(w_n, w_n) \rangle_{0,2}$. Da C in der ersten Koordinate linear und beschränkt ist, gilt: $C(w_n, \phi) \longrightarrow C(w_0, \phi)$

in $L_2(\mathcal{N})$. Wie in Satz 4.6. gezeigt wurde, ist $\tilde{C}(w) = C(w, w)$ vollstetig. Daher: $\langle \tilde{C}(w_n), \Delta \phi \rangle_{0,2} \longrightarrow \langle \tilde{C}(w_0), \Delta \phi \rangle_{0,2}$.

Da $\Delta(\mathcal{V}_{\mathcal{N}})$ dicht in $L_2(\mathcal{N})$ und $(C(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, folgt: $\tilde{C}(w_n) \longrightarrow \tilde{C}(w_0)$ in $L_2(\mathcal{N})$.

Weiterhin ist A im Nullpunkt differenzierbar und es gilt:

$A'(0) = \Delta$. Es erfüllt $T := \Delta$ die Bedingungen aus 2.23.

Es ist A Δ -Potentialoperator des Funktionals $g: \mathcal{W}_{2,2}(\mathcal{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$,
 $g(w) := \frac{1}{2} \langle \Delta w, \Delta w \rangle_{0,2} + \frac{1}{4} \langle \tilde{C}(w), \Delta w \rangle_{0,2}$.

Denn für $v, w \in \mathcal{W}_{2,2}(\mathcal{N})$, $t \in \mathbb{R}$, gilt mit Lemma 4.8.:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (g(w+tv) - g(w)) &= \langle \Delta w, \Delta v \rangle_{0,2} + \frac{1}{4} \langle C(w, w), C(w, v) \rangle_{0,2} \\ &+ \frac{1}{4} (\langle C(w, w), C(v, w) \rangle_{0,2} + \langle C(v, w), C(w, w) \rangle_{0,2}) \\ &+ \frac{1}{4} \langle C(w, v), C(w, w) \rangle_{0,2} = \\ &= \langle \Delta w + \tilde{C}(w), \Delta v \rangle_{0,2}. \end{aligned}$$

Für alle $w \in \mathcal{W}_{2,2}(\mathcal{N})$ gilt: $\langle \tilde{C}(w), \Delta w \rangle_{0,2} = \|C(w, w)\|_{0,2}^2 \geq 0$.

Daher: $g(w) \geq \frac{1}{2} \langle \Delta w, \Delta w \rangle_{0,2} \geq \frac{1}{2} (1/\|\Delta^{-1}\|^2) \|w\|_{2,2}^2$.

Zu $R > 0$ und $s > 1$ gilt für alle $w \in \partial_{g_R}$: $g(w) \neq g(sw)$.

Es erfüllt g daher die Bedingungen aus Satz 2.23.

Da L linear, beschränkt, ist L ungerade, schwach stetig und $L'(0) = L$. Zu zeigen bleibt daher:

Es ist L Δ -hermitesch; das Funktional Ψ ist schwach nach oben halbstetig. Mit $B := L$, $f := \Psi$ sind die Bedingungen aus 2.23. erfüllt.

Für $v, w \in \mathcal{W}_{2,2}(\mathcal{N})$ gilt mit Bemerkung 4.7.:

$$\begin{aligned} \langle Lw, \Delta v \rangle_{0,2} &= \int_{\mathcal{N}} (F_{0_{xy}} w_y - F_{0_{yy}} w_x) v_x + \int_{\mathcal{N}} (F_{0_{xy}} w_x - F_{0_{xx}} w_y) v_y \\ &= \int_{\mathcal{N}} (F_{0_{xy}} v_y - F_{0_{yy}} v_x) w_x + \int_{\mathcal{N}} (F_{0_{xy}} v_x - F_{0_{xx}} v_y) w_y \\ &= \langle Lv, \Delta w \rangle_{0,2}. \end{aligned}$$

Sei $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $\overset{\circ}{W}_{2,2}(\mathcal{U})$ schwach gegen w_0 konvergente Folge. Mit Lemma 4.8. folgt:

$$|\Psi(w_n) - \Psi(w_0)| = |\langle \tilde{C}(w_n) - \tilde{C}(w_0), \Delta F_0 \rangle_{0,2}|.$$

Da $\tilde{C}$ vollstetig ist, gilt: $\Psi(w_n) \longrightarrow \Psi(w_0)$. Da Ψ strikt positiv, folgt aus Satz 2.23.: Es existiert eine antitone Folge aus positiven Bifurkationspunkten der Gleichung $\lambda(\Delta w + \tilde{C}w) = Lw$. Es implizieren Satz 2.24. und Bemerkung 2.25.: Diese Bifurkationspunkte sind Eigenwerte des vollstetigen Operators $\Delta^{-1}L$. Somit konvergiert die Folge der Bifurkationspunkte gegen Null.

Für $j \in \mathbb{N}$ sei λ_j^* ein derartiger Bifurkationspunkt. Es existieren daher $\delta_0 > 0$ und $\varepsilon_0 > 0$ mit $\varepsilon_0 < \frac{1}{2} \lambda_j^*$ derart, daß zu jedem $0 < \delta < \delta_0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ein Paar (u_j, λ_j) aus $\overset{\circ}{W}_{2,2}(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}$ existiert mit: $\lambda_j A u_j = B u_j$ und $|\lambda_j^* - \lambda_j| < \varepsilon$, $0 < \|u_j\| < \delta$.

Nach Wahl von ε ist $\lambda_j > 0$ und es gilt:

$$\left| \frac{1}{\lambda_j^*} - \frac{1}{\lambda_j} \right| = \left| \frac{\lambda_j - \lambda_j^*}{\lambda_j^* \cdot \lambda_j} \right| < 2\varepsilon / \lambda_j^{*2}.$$

Sei nun $\tilde{\varepsilon} > 0$, $\delta > 0$ beliebig. Dann existiert zu

$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2} \min \{ \varepsilon_0, \tilde{\varepsilon} \lambda_j^{*2} \}$ und $\delta > 0$ ein Paar (u_j, λ_j) aus $\overset{\circ}{W}_{2,2}(\mathcal{U}) \times \mathbb{R}$ mit $\lambda_j A u_j = B u_j$ und $|\lambda_j^* - \lambda_j| < \varepsilon$, $0 < \|u_j\| < \delta$.

Es existiert $\frac{1}{\lambda_j^*}$, $A u_j = \frac{1}{\lambda_j^*} B u_j$ und

$$\left| \frac{1}{\lambda_j^*} - \frac{1}{\lambda_j} \right| < \frac{2\varepsilon}{\lambda_j^{*2}} = \tilde{\varepsilon}.$$

Es ist daher $\frac{1}{\lambda_j^*}$ Bifurkationspunkt der Gleichung

$$\Delta w + \tilde{C}(w) = \lambda Lw.$$

§ 5 Eine Anwendung aus der Theorie linearer elliptischer Differentialoperatoren

In diesem Paragraph wird ein Struktursatz für die Menge der schwachen Eigenwerte der linearen Differentialgleichung $\lambda Lx = Mx$ bewiesen. Ein wesentliches Hilfsmittel hierbei ist die Existenzaussage von Korollar 2.17. für die Eigenwerte linearer Operatorengleichungen. Die dieser Untersuchung zugrundeliegenden Definitionen sind der Arbeit VOIGT, WLOKA [19] entnommen.

Sei $\mathcal{V}$ eine lineare in einem reellen separablen Hilbertraum H^0 mit dem Inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ dichte Menge.

5.1. Definition

- a) Ein linearer Operator $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ besitzt einen formal adjungierten Operator L^* , falls $L^*: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ linear und es gilt: $\langle L\phi, \psi \rangle_0 = \langle \phi, L^*\psi \rangle_0$ für alle $\phi, \psi \in \mathcal{V}$.
- b) Es heißt $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ formal selbstadjungiert, falls $L^* = L$.

5.2. Definition

Es seien $L, M: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineare Operatoren. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt schwacher Eigenwert zum schwachen Eigenvektor $u \in H^0 \setminus \{0\}$ bezüglich der Operatoren L, M , falls die formal adjungierten Operatoren L^*, M^* existieren und es gilt:

$$\lambda \langle u, L^*\phi \rangle_0 = \langle u, M^*\phi \rangle_0 \text{ für alle } \phi \in \mathcal{V}$$

Im folgenden seien nun eine lineare Menge $\mathcal{V}$ und zwei reelle separable Hilberträume H^0, H^1 gegeben mit: $\mathcal{V} \subset H^1 \subset H^0$, wobei $\mathcal{V}$ dicht in beiden Räumen H^1 und H^0 und H^1 in H^0 stetig einbettbar sei. Es sei $\langle, \rangle_1$ das Innere Produkt in H^1 .

5.3. Definition

Für einen linearen Operator $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ seien die folgenden Bedingungen definiert: Es existieren Konstanten $c, \gamma > 0$ mit

(E1) $|\langle L\phi, \phi \rangle_0| \geq c \|\phi\|_1^2$ für $\phi \in \mathcal{V}$

(E2) $|\langle L\phi, \psi \rangle_0| \leq \gamma \|\phi\|_1 \cdot \|\psi\|_1$ für $\phi, \psi \in \mathcal{V}$

(E3) Für jede Folge $(\partial_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ mit $\partial_n \rightarrow \partial_0 \in \mathcal{V}$ in H^1 gilt: $\langle L\partial_n, \partial_n \rangle_0 \rightarrow \langle L\partial_0, \partial_0 \rangle_0$.

5.4. Definition

Sei $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ linear. Es besitze L einen formal adjungierten Operator.

- Erfüllt L die Bedingungen (E1), (E2), so heißt L formal stark elliptisch.
- Erfüllt L die Bedingungen (E2), (E3), so heißt L formal kompakt.

5.5. Definition

Sei $L: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ linear. Es heißt L nicht negativ, falls gilt: Es existiert ein $\phi \in \mathcal{V}$ mit $\langle L\phi, \phi \rangle_0 > 0$.

5.6. Satz

Vor.: Es seien $L, M: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ lineare Operatoren,

Es sei L formal stark elliptisch und selbstadjungiert.

Es sei M nicht negativ, formal kompakt und selbstadjungiert.

Beh.: Es existiert entweder eine endliche nichtleere Menge oder eine antitone Folge aus positiven schwachen Eigenwerten bezüglich L, M .

Bew.: Sei $\Omega_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$\Omega_{\mathcal{V}}(\phi, \psi) := \langle L\phi, \psi \rangle_0 = \langle L\psi, \phi \rangle_0 = \Omega_{\mathcal{V}}(\psi, \phi)$. Da L die Bedingung (E2) erfüllt, läßt sich $\Omega_{\mathcal{V}}$ auf $H^1 \times H^1$ fortsetzen. Es bezeichne Ω diese Fortsetzung. Es erfüllt Ω auf H^1 die Bedingungen (E1), (E2) und es gilt: $\Omega(u, v) = \Omega(v, u)$ für $u, v \in H^1$. Somit existiert ein linearer, beschränkter, selbstadjungierter Operator $A: H^1 \rightarrow H^1$ mit:

$\langle Au, v \rangle_1 = \Omega(u, v)$. Es gilt $\langle Au, u \rangle_1 \geq c \|u\|_1^2$ für $u \in H^1$.

Sei $\omega_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch:

$\omega_{\mathcal{V}}(\phi, \psi) := \langle M\phi, \psi \rangle_0 = \langle M\psi, \phi \rangle_0 = \omega_{\mathcal{V}}(\psi, \phi)$. Sei ω die Fortsetzung von $\omega_{\mathcal{V}}$ auf $H^1 \times H^1$. Es erfüllt ω auf H^1 die Bedingung (E2) und es gilt: $\omega(u, v) = \omega(v, u)$, $u, v \in H^1$.

Es existiert daher ein linearer, beschränkter, selbstadjungierter Operator $B: H^1 \rightarrow H^1$ mit $\langle Bu, v \rangle_1 = \omega(u, v)$.

Gezeigt wird nun:

Für jede schwach konvergente Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n \rightharpoonup u_0$ in H^1 gilt: $\langle Bu_n, u_n \rangle_1 \rightarrow \langle Bu_0, u_0 \rangle_1$.

Schritt 1):

Sei $(\partial_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{V}$ mit $\partial_n \rightharpoonup u_0 \in H^1$ in H^1 .

Annahme: Es existiert eine Konstante $\gamma > 0$ derart, daß zu jedem n_0 aus $\mathbb{N}$ ein $n \geq n_0$ aus $\mathbb{N}$ existiert, für das gilt:

$$|\langle B\partial_n, \partial_n \rangle_1 - \langle Bu_0, u_0 \rangle_1| > \gamma.$$

Es ist $(\partial_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt in H^1 . Sei $\alpha := \sup_n \|\partial_n\|_1 < \infty$.

Sei $0 < \varepsilon \leq \gamma / (3(2\|B\|\alpha + \|B\|\varepsilon))$ gewählt.

Da $\mathcal{V}$ dicht in H^1 , existiert $\delta_0 \in \mathcal{V}$ mit $\delta_0 = u_0 + v_0$ und $v_0 \in H^1$, $\|v_0\|_1 \leq \varepsilon/2$. Weiterhin existiert eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ mit $v_n \longrightarrow v_0$ in H^1 und $\|v_n\|_1 \leq \varepsilon$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\mathcal{V} \ni \delta_n + v_n \longrightarrow u_0 + v_0 = \delta_0$ in H^1 .

Mit (E3) folgt:

$$\begin{aligned} \langle B(\delta_n + v_n), \delta_n + v_n \rangle_1 &= \omega(\partial_n + v_n, \partial_n + v_n) = \\ &= \langle M(\partial_n + v_n), \partial_n + v_n \rangle_0 \longrightarrow \langle M\delta_0, \delta_0 \rangle_0 = \omega(\delta_0, \delta_0) = \\ &= \langle B\delta_0, \delta_0 \rangle_1. \end{aligned}$$

Sei nun $n_0 \in \mathbb{N}$ derart gewählt, daß gilt:

$$|\langle B(\delta_n + v_n), \delta_n + v_n \rangle_1 - \langle B\delta_0, \delta_0 \rangle_1| \leq \gamma/3 \text{ für } n \geq n_0 \text{ aus } \mathbb{N}.$$

Für derartige n gilt:

$$\begin{aligned} &|\langle B\delta_n, \delta_n \rangle_1 - \langle Bu_0, u_0 \rangle_1| = \\ &|\langle B\delta_n, \delta_n \rangle_1 - \langle B(\delta_n + v_n), \delta_n + v_n \rangle_1 + \langle B(\delta_n + v_n), \delta_n + v_n \rangle_1 \\ &\quad - \langle B\delta_0, \delta_0 \rangle_1 + \langle B\delta_0, \delta_0 \rangle_1 - \langle Bu_0, u_0 \rangle_1| \\ &\leq \|v_n\|_1 (2\|B\|\|\delta_n\|_1 + \|B\|\|v_n\|_1) + \gamma/3 + \\ &\quad + \|v_0\|_1 (2\|B\|\|u_0\|_1 + \|B\|\|v_0\|_1) \leq \gamma \text{ nach Wahl von } \varepsilon. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Daher:

$$\langle B\delta_n, \delta_n \rangle_1 \longrightarrow \langle Bu_0, u_0 \rangle_1.$$

Schritt 2):

Sei nun $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beliebige in H^1 schwach konvergente Folge. Es bezeichne $u_0 \in H^1$ den schwachen Grenzwert dieser Folge.

Annahme: Zu jeder Teilfolge $T := (u_{n_k}^T)_{k \in \mathbb{N}}$ von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert eine Konstante $\gamma_T > 0$ derart, daß für alle $k_0 \in \mathbb{N}$ ein $k \gg k_0$ aus $\mathbb{N}$ existiert (wobei k von der Wahl von T abhängt) und es gilt:

$$|\langle Bu_{n_k}^T, u_{n_k}^T \rangle_1 - \langle Bu_0, u_0 \rangle_1| > \gamma_T.$$

Fall 1) $\beta := \inf_T \gamma_T = 0$, wobei das Infimum über alle

Teilfolgen T von $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ genommen wird.

Sei $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Dann existiert eine Folge $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Teilfolgen und eine Folge natürlicher

Zahlen $(k_i)_{i \in \mathbb{N}}$ derart, daß für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\langle Bu_{n_k}^{T_i}, u_{n_k}^{T_i} \rangle_1 - \langle Bu_0, u_0 \rangle_1| \leq \gamma_i \text{ für } k \gg k_i \text{ aus } \mathbb{N}.$$

Aus diesen Teilfolgen läßt sich eine weitere Teilfolge T'

$T' = (u_{n_i}^{T'})_{i \in \mathbb{N}}$ konstruieren mit:

$$|\langle Bu_{n_i}^{T'}, u_{n_i}^{T'} \rangle_1 - \langle Bu_0, u_0 \rangle_1| \leq \gamma_i.$$

Dies steht im Widerspruch zur Annahme.

Fall 2) $\beta := \inf_T \gamma_T > 0$.

Da $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schwach konvergent in H^1 gilt: $\alpha := \sup_n \|u_n\|_1 < \infty$.

Sei $0 < \varepsilon \leq \beta / (5(\|B\|(\alpha + \varepsilon)))$ gewählt. Da $\mathcal{V}$ dicht in H^1 gilt: Zu jedem n aus $\mathbb{N}$ existiert ein $\sigma_n \in \mathcal{V}$ mit:

$$\|u_n - \sigma_n\|_1 \leq \varepsilon. \text{ Somit ist } (\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt in } H^1.$$

Es existiert eine in H^1 schwach konvergente Teilfolge

$(\sigma_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\sigma_{n_k} \rightharpoonup \sigma_0 \in H^1$. Mit Schritt 1) folgt nun:

$$\langle B\sigma_{n_k}, \sigma_{n_k} \rangle_1 \longrightarrow \langle B\sigma_0, \sigma_0 \rangle_1.$$

Es existiert daher ein k_0 aus $\mathbb{N}$ derart, daß gilt:

$$|\langle B \partial_{n_k}, \partial_{n_k} \rangle_1 - \langle B \partial_0, \partial_0 \rangle_1| \leq \beta/5 \quad \text{für jedes } k \geq k_0.$$

Sei nun $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die eben bestimmte Teilfolge von $\mathbb{N}$.

Für $k \geq k_0$ gilt:

$$|\langle Bu_{n_k}, u_{n_k} \rangle_1 - \langle Bu_0, u_0 \rangle_1| =$$

$$\begin{aligned} &= |\langle Bu_{n_k}, u_{n_k} \rangle_1 - \langle Bu_{n_k}, \delta_{n_k} \rangle_1 + \langle Bu_{n_k}, \delta_{n_k} \rangle_1 \\ &\quad - \langle B \partial_{n_k}, \partial_{n_k} \rangle_1 + \langle B \partial_{n_k}, \partial_{n_k} \rangle_1 - \langle B \partial_0, \partial_0 \rangle_1 \\ &\quad + \langle B \partial_0, \partial_0 \rangle_1 - \langle Bu_0, \partial_0 \rangle_1 + \langle Bu_0, \partial_0 \rangle_1 \\ &\quad - \langle Bu_0, u_0 \rangle_1| \end{aligned}$$

$$\leq \|B\| \|u_{n_k}\|_1 \varepsilon + \|B\| (\|u_{n_k}\|_1 + \varepsilon) \varepsilon + \frac{1}{5} \beta \varepsilon$$

$$+ \|B\| (\|u_0\|_1 + \varepsilon) \varepsilon + \|B\| \|u_0\|_1 \varepsilon \leq \beta \quad \text{nach Wahl von } \varepsilon.$$

Widerspruch zur Annahme.

Es existiert daher zu jeder in H^1 schwach konvergenten Folge

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $u_n \rightharpoonup u_0$ eine Teilfolge $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\langle Bu_{n_k}, u_{n_k} \rangle_1 \rightarrow \langle Bu_0, u_0 \rangle_1.$$

Dann aber ist $\langle Bu_0, u_0 \rangle_1$ der einzige Häufungswert der Folge

$(\langle Bu_n, u_n \rangle_1)_{n \in \mathbb{N}}$. Dies impliziert: $\langle Bu_n, u_n \rangle_1 \rightarrow \langle Bu_0, u_0 \rangle_1$.

Das sollte gezeigt werden.

Mit $X = Y := H^1$, $S := A$, $W := B$, $T := \text{Id}_{H^1}$ sind die Voraus-

setzungen von Korollar 2.17. erfüllt. Da das Funktional

$\Psi(u) = \langle Wu, u \rangle_1 := \langle Bu, u \rangle_1$ schwach stetig, folgt mit

Korollar 2.17. und Bemerkung 2.19.:

Es existiert eine endliche nichtleere Menge oder eine antitone

Folge aus positiven Eigenwerten bezüglich A , B . Sei nun

λ_j^* ein Eigenwert zum Eigenvektor $z_j \neq 0$ bezüglich A , B .

Mit der Definition von A, B folgt:

$$\begin{aligned} \Lambda^*_j \langle z_j, L^*\phi \rangle_0 &= \Lambda^*_j \langle z_j, L\phi \rangle_0 = \Lambda^*_j \Omega(z, \phi) = \Lambda^*_j \langle Az_j, \phi \rangle_1 = \\ &= \langle Bz_j, \phi \rangle_1 = \Omega(z_j, \phi) = \langle z_j, M\phi \rangle_0 = \\ &= \langle z_j, M^*\phi \rangle_0 \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

5.7. Bemerkung

Ist in Satz 5.6. M positiv und existiert eine antitone Folge aus schwachen Eigenwerten bezüglich L, M, so konvergiert diese Folge gegen Null.

Bew.: Diese schwachen Eigenwerte sind Eigenwerte des nach Satz 2.21. vollstetigen Operators $A^{-1}B$ aus dem Beweis zu 5.6.

5.8. Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^r$ ein Gebiet.

a) Es heißt der Operator $L: \mathcal{V}_\Omega \rightarrow \mathcal{V}_\Omega$ definiert durch:

$$Lu := \sum_{|s| \leq m} a_s(x) D^s u \quad \text{reeller linearer partieller}$$

Differentialoperator in Ω . Hierbei sei $a_s: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,

$a_s \in C^\infty(\overline{\Omega})$ und es gebe ein s mit $|s| = m$ und $a_s \neq$ Nullabbildung auf Ω . Es heiße m Grad von L.

b) Für u, v $\in \mathcal{V}_\Omega$ erhält man durch partielles Integrieren den zu L formal adjungierten Operator L^* :

$$\int_\Omega Lu(x) v(x) dx = \int_\Omega u(x) L^*v(x) dx.$$

Es heißt L formal selbstadjungiert, falls gilt: $L = L^*$.

c) Es heißt L positiv, falls für alle v $\in \mathcal{V}_\Omega$ gilt:

$$\int_\Omega Lv(x)v(x)dx \gg 0$$

und ein $v_1 \in \mathcal{V}_\Omega$ existiert mit:

$$\int_\Omega Lv_1(x)v_1(x)dx > 0.$$

5.9. Satz

Vor.: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Sei $n \geq 2$ aus $\mathbb{N}$.

Der reelle formal selbstadjungierte Differentialoperator

in Ω $L := \sum_{|s| \leq 2n} a_s(x) D^s$ erfülle die Gårding'sche

Ungleichung: $\langle (-1)^n L u + k_0 u, u \rangle_{0,2} \geq c \|u\|_{n,2}^2, u \in \mathcal{V}_\Omega, k_0 \in \mathbb{R}.$

Es sei $M := \sum_{|s| \leq m} b_s(x) D^s$ mit $m < n$ aus $\mathbb{N}$ ein reeller,

positiver, formal selbstadjungierter Differentialoperator in Ω .

Beh.: Für jedes $\mu \in \mathbb{R}$ mit $(-1)^{n+1} \mu \geq k_0$ gilt:

Die Menge der schwachen Eigenwerte λ der Gleichung

$$\lambda(Lu - \mu u) = \mu u$$

besteht entweder aus einer endlichen nichtleeren Menge

positiver Zahlen oder aus einer gegen Null konvergenten

positiven Folge.

Bew.: Die Gårding'sche Ungleichung ist für jedes $k \geq k_0$ aus $\mathbb{R}$ erfüllt. Sei nun ein derartige k fixiert.

Es gilt: (vgl. VOIGT, WLOKA [19])

$$|\langle Lu + (-1)^n k u, \phi \rangle_{0,2}| \leq \gamma \|u\|_{n,2} \|\phi\|_{n,2} \text{ für } u, \phi \in \mathcal{V}_\Omega.$$

Der Operator $\tilde{L} := L + (-1)^n k \cdot \text{Id}_{\mathcal{V}_\Omega}$ erfüllt daher für

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_\Omega, H^1 = \hat{W}_{n,2}(\Omega), H^0 = L_2(\Omega)$ die Bedingungen (E1), (E2).

Für $\mu := (-1)^{n+1} k$ ist der Operator $L - \mu \text{Id} : \mathcal{V}_\Omega \rightarrow \mathcal{V}_\Omega$ formal stark elliptisch und selbstadjungiert.

Es läßt sich $M : \mathcal{V}_\Omega \rightarrow \mathcal{V}_\Omega$ stetig erweitern zu einem Operator von $\hat{W}_{n,2}(\Omega)$ nach $\hat{W}_{n-m,2}(\Omega)$, der wiederum mit M bezeichnet werde. Es sei $i : \hat{W}_{n-m,2}(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ die vollstetige Einbettung. Somit ist $iM : \hat{W}_{n,2}(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ vollstetig.

Es gilt: $\langle M\phi, \psi \rangle_{0,2} = \langle iM\phi, i\psi \rangle_{0,2} \leq c \|\phi\|_{n,2} \|\psi\|_{n,2}, \phi, \psi \in \mathcal{V}_\Omega.$

Für jede in $\overset{\circ}{W}_{n,2}(\mathcal{H})$ schwach konvergente Folge $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ mit $\sigma_n \longrightarrow \sigma_0 \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle M \sigma_n, \sigma_n \rangle_{0,2} &= \langle iM \sigma_n, i \sigma_n \rangle_{0,2} \longrightarrow \langle iM \sigma_0, i \sigma_0 \rangle_{0,2} \\ &= \langle M \sigma_0, \sigma_0 \rangle_{0,2}. \end{aligned}$$

Für $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$, $H^1 = \overset{\circ}{W}_{n,2}(\mathcal{H})$, $H^0 = L_2(\mathcal{H})$ erfüllt M daher die Bedingungen (E2) und (E3). Es ist $M: \mathcal{V}_{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathcal{V}_{\mathcal{H}}$ ein positiver, formal kompakter und selbstadjungierter Operator. Mit Satz 5.6. und Bemerkung 5.7. folgt die Behauptung.

Anhang

Bemerkungen zur Monographie A. LANGENBACH [20]

In diesem Buch wird ebenfalls die Operatorengleichung $\lambda Ax = Bx$ behandelt, und zwar für Potentialoperatoren A, B auf einem Hilbertraum, wobei A als monoton und stetig sowie B als verstärkt stetig vorausgesetzt wird, also speziellere Voraussetzungen gemacht werden als in der vorliegenden Arbeit. Für die genannte Operatorengleichung weist Langenbach die Existenz desjenigen Bifurkationspunktes nach, der als geeignetes relatives Minimum des Funktional dargestellt wird, zu dem B gehört, während in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe der Lusternik-Schnierelmann Theorie weitere Bifurkationspunkte gefunden werden.

Schlußbemerkung zur Arbeit J. NAUMANN [17]

Der Bifurkationssatz von NAUMANN [17] läßt sich auf beliebige T-Potentialoperatoren verallgemeinern. Dies kann durch eine systematische Modifikation des zugehörigen Beweises gezeigt werden. Der Bifurkationssatz von NAUMANN läßt sich jedoch auch im separablen Fall und nur für ungerade Operatoren formuliert nicht aus dem verallgemeinerten Bifurkationssatz ableiten, da die Bedingungen an den Operator A in den beiden Arbeiten nicht vergleichbar sind. Über den Operator B macht NAUMANN speziellere Voraussetzungen als in der vorliegenden Arbeit.

Literaturverzeichnis

- [1] M. BERGER "An eigenvalue problem for nonlinear elliptic partial differential equations"; Trans. AMS 120, p145-184 (1965)
- [2] "- "A Sturm-Liouville theorem for nonlinear elliptic partial differential equations"; Ann. Scuola Pisa XX, p543-582 (1966)
- [3] "- "On Von Karman's equations and the buckling of a thin elastic plate I"; Comm. Pure Appl. Math. 20, p687-719 (1967)
- [4] "- "A bifurcation theory for nonlinear elliptic partial differential equations and related systems I"; in KELLER, ANTMANN "Bifurcation theory and nonlinear eigenvalue problems"; Benjamin, N.Y. (1969)
- [5] "- "Multiple solutions of nonlinear operator equations arising from the calculus of variations"; Proc.Symp.Pure Math. 18 AMS, p10-26 (1970)
- [6] F. BROWDER "Variational methods for nonlinear elliptic eigenvalue problems"; Bull. AMS 71, p176-183 (1965)
- [7] "- "Lusternik-Schnierelman-category and nonlinear eigenvalue problems"; Ann.Math 72, p459-477 (1965)
- [8] "- "Nonlinear eigenvalue problems and Galerkin approximation"; Bull.AMS 74, p651-656 (1968)

- [9] F. BROWDER "Pseudo-monotone operators and the direct method of the calculus of variations"; Arch.Rat.Mech.Anal. 38, p268-277 (1970)
- [10] -"- "Existenz theorems for nonlinear partial differential equations"; Proc.Symp.Pure Math. 16, AMS, p1-61 (1970)
- [11] S. FUCIK "Spectral analysis of nonlinear operators"; Lect. notes Math. 346, Springer, (1973)
- [12] M.A. KRASNOSELS'KII "Topological methods in the theory of nonlinear integral equations"; Pergamon, Oxford (1964)
- [13] LUSTERNIK, SCHNIERELMANN "Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels"; Act.scient.ind. 188, Hermann, Paris (1934)
- [14] J. NAUMANN "Lusternik-Schnierelmann-Theorie und nichtlineare Eigenwertprobleme"; Math. Nachr. 53, p303-336 (1972)
- [15] -"- "A characterization of the eigenvalues of a completely selfadjoint operator"; Comm.Math.Carol. 13, p63-77 (1972)
- [16] -"- "Variationsmethoden für Existenz und Bifurkation von Lösungen nichtlinearer Eigenwertprobleme I"; Math. Nachr. 54, p285-296 (1972)
- [17] -"- "Variationsmethoden....II"; Math. Nachr. 55, p325-344 (1973)

- [18] M. VAINBERG "Variational methods for the
study of nonlinear operators";
Holden-Day, San Francisco (1964)
- [19] A. VOIGT, J. WLOKA "Hilberträume und elliptische
Differentialoperatoren";
BI, Zürich (1975)
- [20] A. LANGENBACH "Monotone Potentialoperatoren in
Theorie und Anwendung"; Springer, N.Y.
(1977)

Lebenslauf

Ich wurde am 9. März 1951 in Stockholm geboren.

Meine Eltern sind Dipl.-Ing. Herbert und Marianne Vetter.

Ich besuchte von 1957 bis 1961 die Volksschule in

Staffelstein/Ofr. und im Schuljahr 1961/62 die Oberreal-
schule in Lichtenfels/Ofr. Ab 1962 besuchte ich das

Ohm-Gymnasium in Erlangen. Dort bestand ich 1970 das Abitur.

Im Wintersemester 1970/71 begann ich mit dem Studium der
Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg.

Ich hörte u.a. Vorlesungen der Professoren Bauer, Jacobs,
Kölzow und Meinardus. Ich bestand im Juli 1972 das

Vordiplom und im Juli 1974 das Hauptdiplom in Mathematik.

Meine Diplomarbeit fertigte ich bei Prof. Dr. D. Kölzow
an. Seit Herbst 1974 arbeite ich als Schüler von
Prof. Dr. D. Kölzow an meiner Doktorarbeit.

Seit 1973 bin ich freier Mitarbeiter der Firma Siemens.

Seit 1975 arbeite ich als wissenschaftliche Hilfskraft an
der Universität Bayreuth.

J. Vetter

Copy-Center 2000

852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30
Tel. 09131-26197